Fuente: PreUniversitario Pedro de Valdivia

Guía Práctica N° 12

RAÍCES – FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA

DEFINICIÓN 1: Si **n** es un entero par positivo y **a** es un real no negativo, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el único real **b**, no negativo, tal que $b^n = a$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a\ ,\ b \geq 0}$$

DEFINICIÓN 2: Si **n** es un entero impar positivo y **a** es un real cualquiera, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el único real **b** tal que $b^n = a$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a\ ,\ b \in IR}$$

OBSERVACIONES:

- Si **n** es un entero par positivo y **a** es un real negativo, entonces $\sqrt[n]{a}$ **NO ES REAL.**
- La expresión $\sqrt[n]{a^k}$, con **a** real no negativo, se puede expresar como una potencia de exponente fraccionario.

$$\boxed{\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}}$$

- $\boxed{\sqrt{a^2} = |a|, \text{ para todo número real}}$

EJEMPLOS

1. $\sqrt{16} - \sqrt[3]{125} + \sqrt[4]{81} - \sqrt[5]{-32} =$

   A) 14
   B) 6
   C) 4
   D) 2
   E) 0

2. ¿Cuál(es) de los siguientes números es (son) equivalentes con $\sqrt{(-3)^2}$?

   I) $\sqrt{9}$
   II) 3
   III) -3

   A) Sólo I
   B) Sólo II
   C) Sólo III
   D) Sólo I y II
   E) Sólo II y III

3. La expresión $\dfrac{\sqrt{9} - \sqrt[3]{-8} + \sqrt[4]{16}}{2 - \sqrt[5]{-32}}$ es igual a

A) 0
B) $\frac{3}{4}$
C) $\frac{7}{4}$
D) $\frac{9}{4}$
E) 3

4. El valor de $\dfrac{\sqrt[3]{(-2)^3} - \sqrt{(-5)^2}}{\sqrt[5]{-5^5}}$ es

A) -2
B) $-\frac{7}{5}$
C) $-\frac{3}{5}$
D) $\frac{7}{5}$
E) no está definido

5. $\sqrt{0,04} + \sqrt[3]{0,064} =$

A) 0,024
B) 0,24
C) 0,6
D) 1
E) 6

6. $\sqrt[5]{(\sqrt{9})^{\sqrt{\frac{25}{4}}}} =$

A) $\frac{1}{9}$
B) $\sqrt{3}$
C) 6
D) 9
E) 81

PROPIEDADES

Si $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ están definidas en IR, entonces:

⁕ **MULTIPLICACIÓN DE RAÍCES DE IGUAL ÍNDICE**

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}}$$

⁕ **DIVISIÓN DE RAÍCES DE IGUAL ÍNDICE**

$$\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad b \neq 0}$$

EJEMPLOS

1. $\sqrt[3]{5\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{5\sqrt{3}} =$

   A) 15
   B) $\sqrt[9]{25\sqrt[4]{3}}$
   C) $\sqrt[3]{25\sqrt{3}}$
   D) $\sqrt[3]{5\sqrt{3}}$
   E) $\sqrt[3]{75}$

2. $\dfrac{\sqrt[4]{\dfrac{a}{b^3}}}{\sqrt[4]{\dfrac{b}{a^3}}} =$

   A) 1
   B) $\dfrac{a}{b}$
   C) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^4$
   D) $\sqrt{\dfrac{1}{ab}}$
   E) $\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}$

2. Si $x \neq y$, entonces el valor de $\dfrac{\sqrt[n]{x - y}}{\sqrt[n]{y - x}}$ es

A) $\dfrac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}}{\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{x}}$
B) 0
C) 1
D) -1
E) no está definido

4. $\sqrt[p]{3^{p + 2} - 3^{p}} \cdot \sqrt[p]{2^{-3}} =$

A) ± 3
B) $\dfrac{3}{8} \cdot (\sqrt[p]{8})$
C) $3 \cdot \left(\sqrt[p]{\dfrac{5}{8}}\right)$
D) $6^{-\frac{6}{p}}$
E) 3

5. $\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{7}} \cdot \sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{3}} =$

A) -2
B) 2
C) 4
D) $\sqrt{3} + \sqrt{7}$
E) ninguno de los valores anteriores

6. $\dfrac{\sqrt[xy]{x^{y}} \cdot \sqrt[xy]{y^{x}}}{\sqrt[xy]{xy}} =$

A) $\sqrt[xy]{x^{y - 1} \cdot y^{x - 1}}$
B) $\sqrt[xy]{xy}$
C) $\dfrac{xy}{x^{y} \cdot y^{x}}$
D) $\sqrt[xy]{\dfrac{xy}{x^{y} \cdot y^{x}}}$
E) $\sqrt[xy]{(x \cdot y)^{x - 1}}$

PROPIEDADES

Si $a \in \mathbb{R}^+$ y m y n $\in \mathbb{Z}^+$, entonces:

⁕ **POTENCIA DE UNA RAÍZ**

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m}$$

⁕ **RAÍZ DE UNA RAÍZ**

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}}$$

EJEMPLOS

1. $\sqrt[3]{8^4}$ =

   A) 2^3
   B) 2^4
   C) 2^6
   D) 2^{12}
   E) 2^{36}

2. $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$ =

   A) 2
   B) 4
   C) 8
   D) $\sqrt[5]{64}$
   E) $\sqrt[6]{8}$

3. $\sqrt[4]{\sqrt[5]{-2}}$ =

   A) $-\sqrt[9]{2}$
   B) $\sqrt[9]{2}$
   C) $-\sqrt[20]{2}$
   D) $\sqrt[20]{2}$
   E) no es un número real

4. $\sqrt[3]{\sqrt{2\sqrt{9}}} =$

A) 1

B) $\sqrt[6]{6}$

C) $\sqrt{2}$

D) $\sqrt[3]{6}$

E) 2

5. $10 \cdot \sqrt{\sqrt[5]{32^{-2}}} =$

A) -20

B) -5

C) 0,5

D) 5

E) 20

6. $\sqrt[3]{\sqrt{-2^4 \cdot \sqrt[3]{-64}}} =$

A) $\sqrt[18]{2^7}$

B) $\sqrt[9]{2^7}$

C) $\sqrt[6]{32}$

D) 2

E) no está definido

7. Si p > 0, entonces $\sqrt{\dfrac{p}{\sqrt[3]{p}}} =$

A) $\sqrt[6]{p}$

B) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{p}}$

C) $\sqrt[3]{p}$

D) $\sqrt[3]{p^2}$

E) $\sqrt[6]{p^5}$

PROPIEDADES

⁕ **AMPLIFICACIÓN Y SIMPLIFICACIÓN DEL ORDEN DE UNA RAÍZ**

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m},\ m \in \mathbb{Z}^+,\ a \in \mathrm{IR}^+}$$

⁕ **PRODUCTO DE RAÍCES DE DISTINTO ÍNDICE**

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[mn]{a^m \cdot b^n},\ a,\ b \in \mathrm{IR}^+}$$

⁕ **FACTOR DE UNA RAÍZ COMO FACTOR SUBRADICAL**

$$\boxed{b\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n \cdot a},\ b \in \mathrm{IR}^+}$$

EJEMPLOS

1. $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt{2} =$

   A) $\sqrt[8]{16}$
   B) $\sqrt[6]{16}$
   C) $\sqrt[4]{16}$
   D) $\sqrt[4]{32}$
   E) $\sqrt{8}$

2. $2 \cdot \sqrt[3]{3} =$

   A) $\sqrt[3]{36}$
   B) $\sqrt[3]{24}$
   C) $\sqrt[3]{18}$
   D) $\sqrt[3]{12}$
   E) $\sqrt[3]{6}$

3. Si $x > 0$, entonces $2\sqrt{18x^2} - \sqrt{32x^2} - 3x\sqrt{2} =$

   A) $-x\sqrt{2}$
   B) $x\sqrt{2}$
   C) $-2x\sqrt{2}$
   D) $2x\sqrt{2}$
   E) $3x\sqrt{2}$

4. $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt{3}$ =

A) $\sqrt[6]{15}$
B) $\sqrt[5]{15}$
C) $\sqrt[4]{15}$
D) $\sqrt[4]{45}$
E) $\sqrt[4]{75}$

5. $\dfrac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[4]{6}}$ =

A) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$
B) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$
C) $2^{\frac{1}{12}} \cdot 3^{-\frac{1}{4}}$
D) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$
E) 6

6. $\sqrt{2} - \sqrt{8} + \sqrt{18}$ =

A) $\sqrt{4}$
B) $\sqrt{8}$
C) $\sqrt{18}$
D) $\sqrt{24}$
E) $\sqrt{28}$

7. La expresión $x \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}$ es equivalente a

A) $\sqrt{x^3}$
B) $\sqrt[3]{x^4}$
C) $\sqrt[3]{x^{16}}$
D) $\sqrt[3]{x^{18}}$
E) $\sqrt[9]{x^{16}}$

RACIONALIZACIÓN

Racionalizar el denominador de una fracción consiste en transformarla en una fracción equivalente cuyo denominador no contenga ninguna raíz.

CASO 1: Fracciones de la forma $\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}\sqrt{\mathbf{c}}}$

CASO 2: Fracciones de la forma $\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{p}\sqrt{\mathbf{b}} + \mathbf{q}\sqrt{\mathbf{c}}}$

EJEMPLOS

1. $\dfrac{6}{5\sqrt{3}} =$

A) $\dfrac{6}{5}\sqrt{3}$
B) $2\sqrt{3}$
C) $\dfrac{2}{5}\sqrt{3}$
D) $\dfrac{2}{5}$
E) $-\dfrac{6}{5}\sqrt{3}$

2. $\dfrac{12}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}} =$

A) $24\sqrt{3} + 36\sqrt{2}$
B) $24\sqrt{3} - 36\sqrt{2}$
C) $-4\sqrt{3} - 6\sqrt{2}$
D) $6\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$
E) $4\sqrt{3} + 6\sqrt{2}$

3. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones representa(n) la tercera parte de $\frac{1}{\sqrt{3}}$?

I) $\frac{\sqrt{3}}{9}$

II) $\frac{1}{3}$

III) $\frac{2}{\sqrt{108}}$

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y II
D) Sólo I y III
E) I, II y III

4. El factor racionalizador de la expresión $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$ es

A) $\sqrt[n]{b^m}$

B) $\sqrt[n]{b}$

C) $\sqrt[n]{b^{n-m}}$

D) $\sqrt[n]{b^{m-n}}$

E) $\sqrt{b^m}$

5. $\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{3}} =$

A) $-\sqrt[6]{2}$

B) $\sqrt[6]{2}$

C) $\sqrt{2}$

D) $\sqrt[3]{2 - \sqrt{2}}$

E) 1

6. $\frac{6}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} =$

A) $-2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$
B) $2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$
C) $\frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{5}$
D) $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$
E) $3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

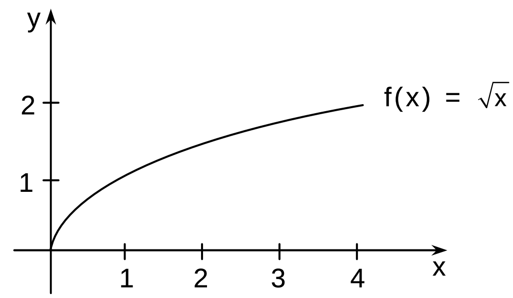
FUNCIÓN RAÍZ

Si **x** es un número real no negativo, se define la función raíz cuadrada de **x** por

$$\boxed{\mathbf{f(x) = \sqrt{x}}}$$

Su representación gráfica es

x	**f(x)**
0	0
0,51	0,70..
1,5	1
2	1,22..
2,5	1,41..
3	1,58..
3,5	1,73..
4	1,87..
	2



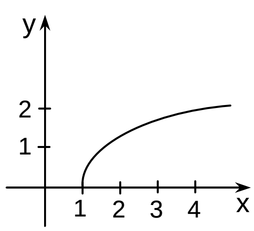
OBSERVACIONES:

- La función es creciente.
- La función raíz cuadrada es considerada como un modelo de crecimiento lento.

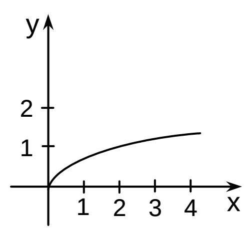
EJEMPLO

1. El gráfico que mejor representa a la función $h(x) = \sqrt{x - 2}$, es

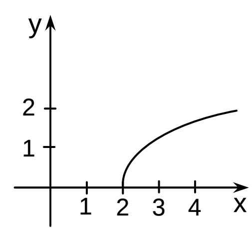
A)



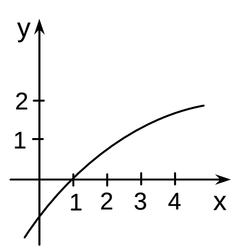
B)



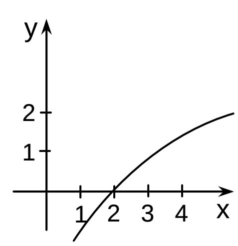
C)



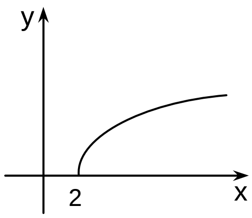
D)

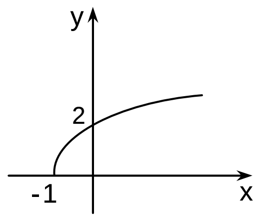


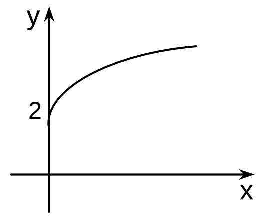
E)

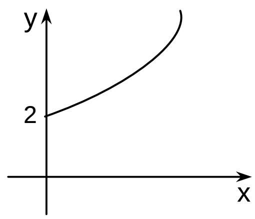


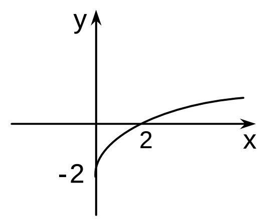
2. ¿Cuál de las siguientes opciones representa mejor al gráfico de $f(x) = \sqrt{x} + 2$?

A)


B)


C)


D)


E)


3. ¿Cuál de las siguientes funciones está mejor representada por el gráfico de la figura 1?

A) $f(x) = \sqrt{x + 3} - 1$
B) $g(x) = \sqrt{x - 3} + 1$
C) $h(x) = 3 + \sqrt{x - 1}$
D) $s(x) = -3 + \sqrt{x + 1}$
E) $p(x) = -1 + \sqrt{x - 3}$

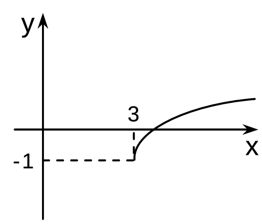
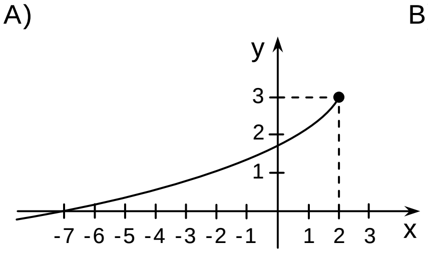
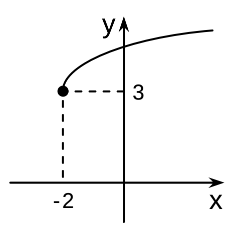
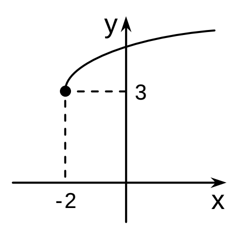


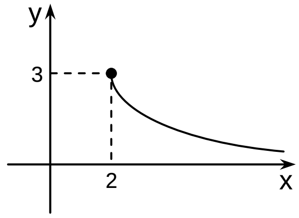
fig. 1

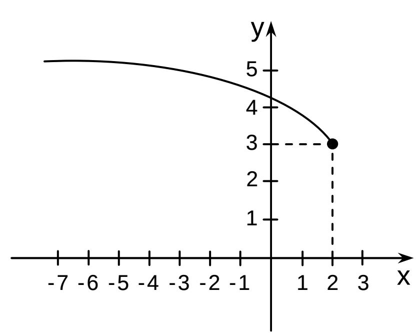
4. El gráfico que mejor representa a la función $f(x) = 3 - \sqrt{2 - x}$, es

A)


B)


C)


D)


E)


EJERCICIOS

1. $\sqrt[3]{-8} + \sqrt{4} =$

   A) $\sqrt[5]{-4}$
   B) $\sqrt[6]{-4}$
   C) 0
   D) -4
   E) 4

2. ¿Cuál(es) de las siguientes raíces representa(n) un número real?

   I) $\sqrt[4]{-1}$
   II) $\sqrt[5]{-32}$
   III) $\sqrt{7}$

   A) Sólo II
   B) Sólo III
   C) Sólo II y III
   D) I, II y III
   E) Ninguna de ellas

3. $\sqrt{0{,}09}$ es equivalente a

   A) 0,003
   B) 0,018
   C) 0,03
   D) 0,18
   E) 0,3

4. El valor de $5\sqrt{12} - 2\sqrt{27}$ es

   A) $-8\sqrt{3}$
   B) $-4\sqrt{3}$
   C) $4\sqrt{3}$
   D) $2\sqrt{3}$
   E) $\sqrt{3}$

5. $(\sqrt{72} + \sqrt{450} - \sqrt{162}) : \sqrt{2} =$

A) 12
B) $12\sqrt{2}$
C) 38
D) $38\sqrt{2}$
E) $\sqrt{12}$

6. $5\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{8} =$

A) $20\sqrt{14}$
B) $80\sqrt{3}$
C) $50\sqrt{3}$
D) $40\sqrt{3}$
E) $20\sqrt{3}$

7. Si $\sqrt{x} = 2\sqrt{2}$, el valor de $\sqrt{9} \cdot x$, es

A) 72
B) 24
C) $6\sqrt{2}$
D) $\sqrt{72}$
E) $2\sqrt{18}$

8. Si $\sqrt{x} = 3$, entonces $\sqrt{16} \cdot x$ es igual a

A) 12
B) 18
C) 20
D) 24
E) 36

9. El producto $\sqrt{7} \cdot \sqrt[6]{7}$, es equivalente a

A) $\sqrt[6]{7}$
B) $\sqrt[6]{49}$
C) $\sqrt[6]{7^4}$
D) $\sqrt[12]{7}$
E) $\sqrt[12]{49}$

10. El valor de $(\sqrt{2} + 4\sqrt{3}) \cdot (4\sqrt{3} - \sqrt{2})$ es

A) $16\sqrt{3} - 2$
B) $8\sqrt{6} - 2$
C) 0
D) 46
E) -46

11. $\dfrac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{6}} =$

A) $\sqrt{6} + \sqrt{5}$
B) $\sqrt{6} - \sqrt{5}$
C) $\sqrt{5} - \sqrt{6}$
D) $-\sqrt{5} - \sqrt{6}$
E) $\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{5}}{-11}$

12. Si $1 + \sqrt{x} = b$, con $b > 1$, entonces $x + 1$ en función de **b**, es

A) $b^2 - 2b + 1$
B) $b^2 - 2b + 2$
C) $b^2 - 2b - 2$
D) $b^2 + 2b - 2$
E) $b^2 + 2b + 2$

13. $\sqrt{3\sqrt{3} + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{3\sqrt{3} - \sqrt{2}} =$

A) 5
B) 25
C) $-\sqrt{25}$
D) $\sqrt{5}$
E) $6\sqrt{3}$

14. $\dfrac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2}}} =$

A) $\sqrt{2}$
B) $\sqrt[3]{2}$
C) $\sqrt[6]{2}$
D) 1
E) 2

15. $\dfrac{\sqrt{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}}{\sqrt[3]{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}} =$

A) 4
B) $4\frac{5}{6}$
C) 1
D) $4\frac{2}{3}$
E) $4\frac{3}{2}$

16. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones representa(n) un número real?

I) $\sqrt{2\sqrt{5} - 5}$
II) $\sqrt{4\sqrt{3} - 3\sqrt{5}}$
III) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo II y III
E) Todas ellas

17. El orden decreciente de los números $a = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $b = \frac{10}{3\sqrt{5}}$ y $c = \frac{5}{\sqrt{125}}$ es

A) b, c, a
B) b, a, c
C) a, c, b
D) a, b, c
E) c, b, a

18. La figura 1 muestra un triángulo equilátero de lado 4 y área **x**, un rectángulo de ancho $\sqrt{2}$, largo 5 y área **y**, y un triángulo de catetos 2 y 7 y área **z**. Entonces, se cumple que

A) x < y < z
B) y < z < x
C) z < y < x
D) y < x < z
E) x < z < y

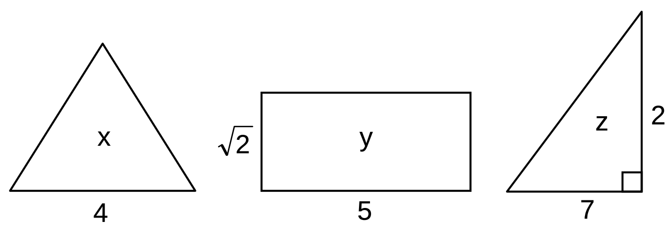
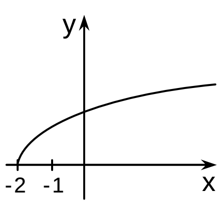
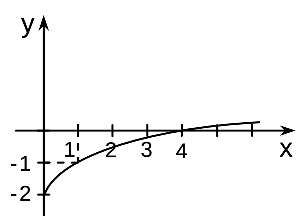
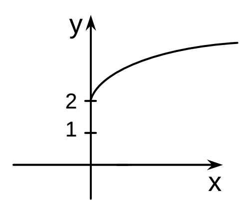


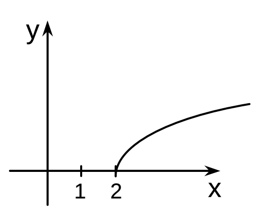
fig. 1

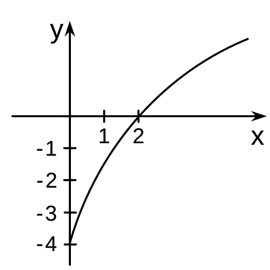
19. La función $f(x) = \sqrt{x} - 2$ está representada en la opción

A)


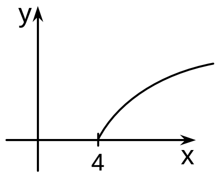
B)


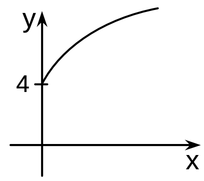
C)


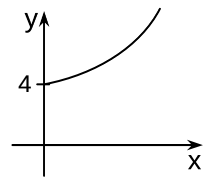
D)


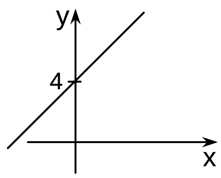
E)


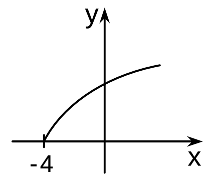
20. ¿Cuál gráfico representa mejor la función $f(x) = \sqrt{x - 4}$?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

21. Sea f una función en los números reales, definida por $f(x) = \sqrt{ax + 1}$. Si $f(3) = 4$, entonces el valor de **a** es

A) 3
B) 4
C) -4
D) 5
E) -5

22. El crecimiento de una enredadera está dada por la función $f(x) = \sqrt{x + 1}$, siendo **x** el tiempo en semanas, y **f(x)** el crecimiento en metros. Entonces, el tiempo que demora en crecer una longitud de 4 metros es

A) 3 semanas
B) 8 semanas
C) 10 semanas
D) 12 semanas
E) 15 semanas

23. Si $\sqrt{\sqrt{3} + 1} - \sqrt{\sqrt{3} - 1} = m$, entonces el valor de $\frac{m^2}{2}$ es

A) $2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$
B) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$
C) 1
D) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$
E) $4\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$

24. El resultado de la expresión $(\sqrt{5} + 2)^5 (\sqrt{5} - 2)^4 - (\sqrt{5} - 2)^5 (\sqrt{5} + 2)^4$ es

A) entero positivo
B) entero negativo
C) 0
D) irracional positivo
E) irracional negativo

25. Si **a** y **b** son enteros positivos, la expresión $\dfrac{b}{\sqrt{a+b} - \sqrt{b}}$ es equivalente a

A) $\dfrac{(\sqrt{a+b} + \sqrt{a})b}{b + 2a}$
B) $\sqrt{b + 2a}$
C) $\dfrac{b + \sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}$
D) $\sqrt{b}$
E) $\dfrac{b(\sqrt{a+b} + \sqrt{b})}{a}$

26. La expresión $\sqrt[3]{a} + \sqrt{b}$ es un número real si:

(1) $b > 0$
(2) $a > 0$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

27. Sea $f(x) = \sqrt{x + q}$. Se puede determinar el valor de **q** si se sabe que:

(1) $x = 2$
(2) $f(x) = 3$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

28. La gráfica de $f(x) = \sqrt{x - p}$ intersecta al eje positivo de las abscisas si:

(1) $p \neq 0$

(2) $p > 0$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

29. La expresión $\dfrac{9}{\sqrt{p}}$ está definida en los números reales si:

(1) $p \in \mathbb{Z}$

(2) $p \in \mathbb{Q}$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

30. El valor de $\dfrac{\sqrt{9a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ se puede determinar si se sabe que:

(1) $a = 3$

(2) $b = 4a$ y $a > 0$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional