Fuente: Universidad Católica de Chile

GUÍA PRÁCTICA N° 3
Plan Biólogo II

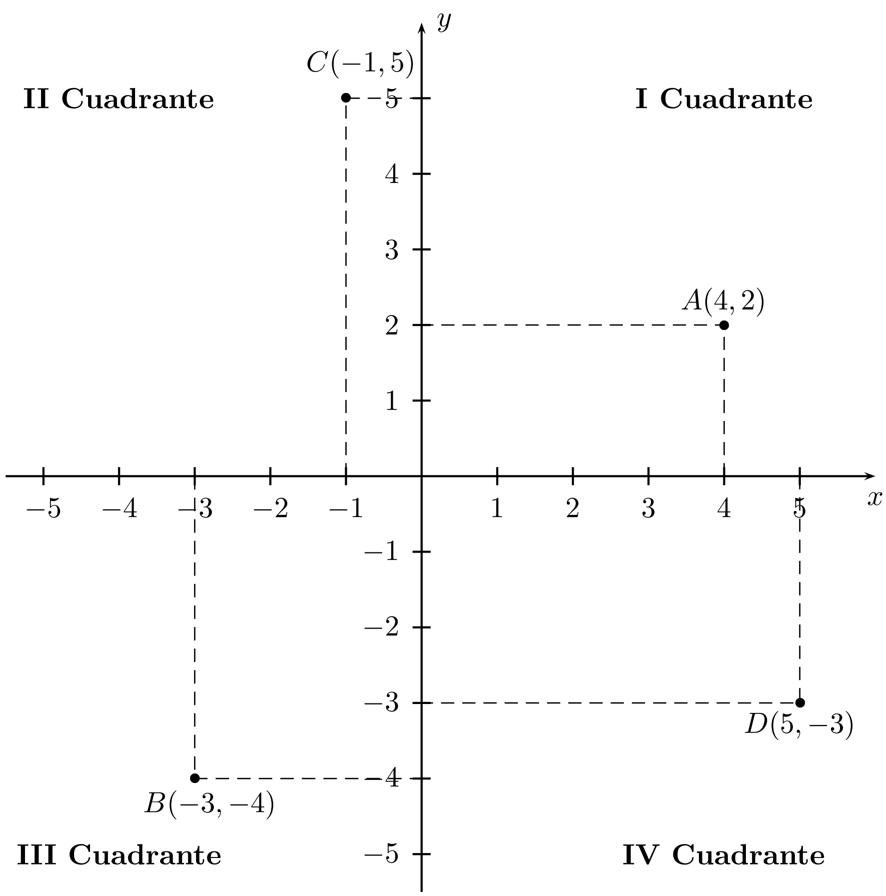
GEOMETRÍA ANALÍTICA

1. ¿Dónde?

En general, tanto para **geometría analítica** como para graficar **funciones** trabajaremos en el **plano cartesiano ortogonal**.

Este plano posee 2 ejes perpendicular conocidos como: eje de las abcisas o x (horizontal) y el eje de las ordenadas o y (vertical).

Para deteminar la posición de los puntos en el plano utilizamos un sistema de coordenadas respectivas a los ejes.



Ojo 1 *Si A tiene coordenadas (x, y), entonces A está en el*

1. *I Cuadrante, si $x > 0$ e $y > 0$.*
2. *II Cuadrante, si $x < 0$ e $y > 0$.*
3. *III Cuadrante, si $x < 0$ e $y < 0$.*
4. *IV Cuadrante, si $x > 0$ e $y < 0$.*
5. *Eje x, si $x = 0$.*
6. *Eje y, si $y = 0$.*
7. *Origen, si $x = 0$ e $y = 0$*

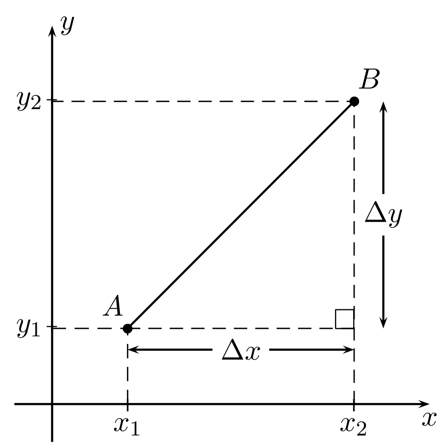
2. Trabajando con puntos...

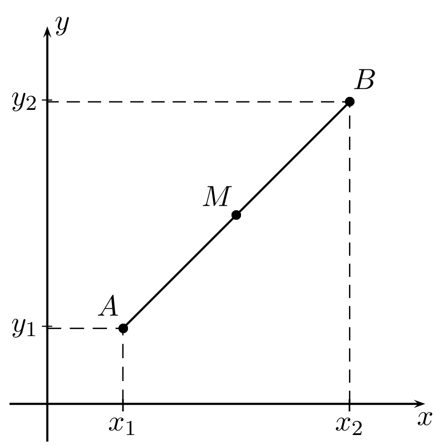
Dados dos puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, entonces, según el Teorema de Pitágoras, la **distancia** entre estos puntos está dada por la expresión

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ojo 2 *Si tenemos dos puntos, no importa cuál tomemos como A y cuál como B ya que $(a - b)^2 = (b - a)^2$.*

Ojo 3 *La distancia es siempre un número no negativo.*





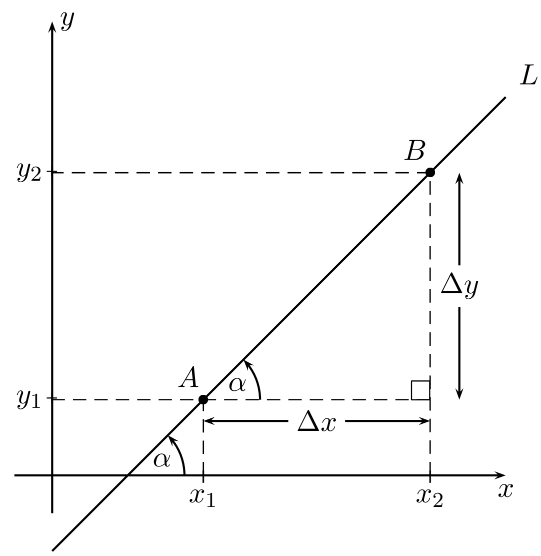
Dados dos puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, entonces las coordenadas del **punto medio** del segmento $\overline{AB}$ están dadas por la expresión

$$M_{AB} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

3. Ecuación de la recta

Se conoce como **pendiente** (m) de una recta a la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación (ángulo que forma la recta con el eje x, en sentido antihorario, desde el eje x hacia la recta), es decir,

$$m = \tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

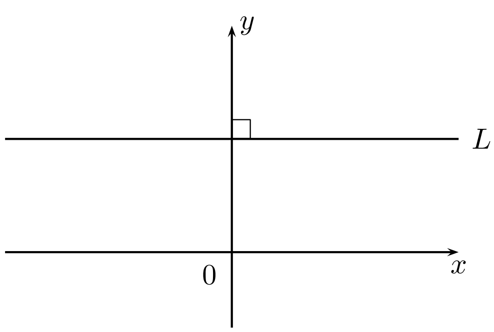


Ojo 4 *Una recta* ***siempre*** *posee la misma pendiente.*

Ojo 5 *La pendiente de la recta nos dice cómo varía verticalmente a medida que avanzamos horizontalmente.*

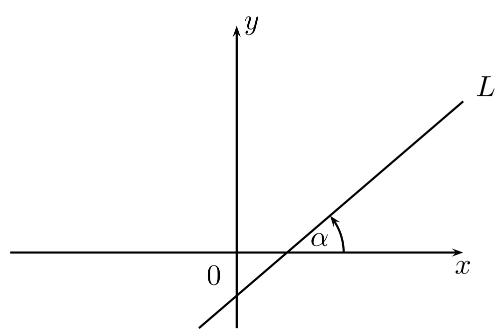
$\alpha = 0 \iff m > 0$

L es paralela al eje x



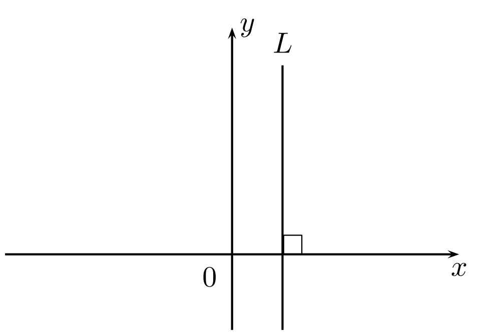
$0 < \alpha < 90^{\text{o}} \iff m > 0$

L tiene pendiente positiva



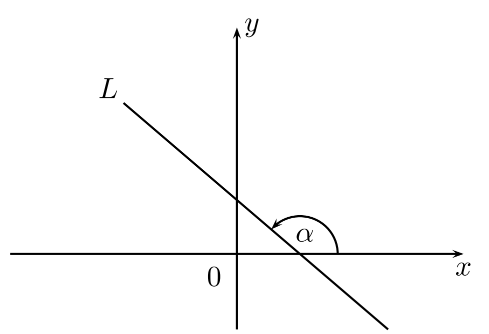
$\alpha = 0 \iff m$ no está definida

L es paralela al eje y



$90^{\text{o}} < \alpha < 180^{\text{o}} \iff m < 0$

L tiene pendiente negativa



Con esto, ya podemos establecer una **ecuación para la recta**. Es decir, para cualquier x, a través esta ecuación, podemos encontrar un y tal que la recta pasa por el punto (x, y).

Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos puntos por los que pasa la recta, entonces la ecuación de ésta está dada por

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}} \tag{1}$$

Notemos que el lado derecho de la ecuación es la pendiente m de la recta, por lo tanto, podemos reescribir la ecuación como

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = m} \tag{2}$$

También podemos escribir y en función de x como

$$y - y_1 = mx + (y_1 - mx_1),$$

llamando **coeficiente de posición** a $n = (y_1 - mx_1)$, entonces obtenemos

$$\boxed{y = mx + n} \tag{3}$$

Es importante recalcar que si tenemos una ecuación que relaciona dos variables como por ejemplo

$$ax + by + c = 0, \tag{4}$$

con donde a, b y c son números reales fijos, podemos escribirla también como una recta

$$y = \underbrace{\frac{-a}{b}}_{m} x + \underbrace{\frac{-c}{b}}_{n}.$$

Finalmente, si en vez de y escribimos $f(x)$, encontramos una función lineal, como veremos más adelante.

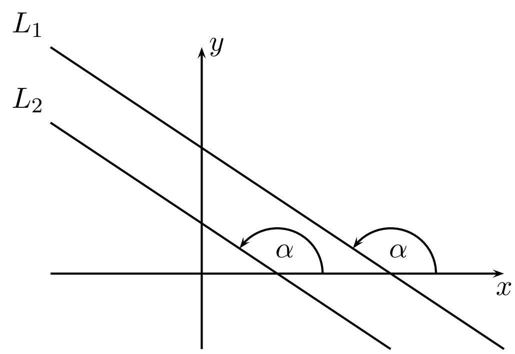
Ojo 6 *La ecuaciones* $(1), (2), (3)$ *y* (4) *se conocen como* ***ecuación punto-punto, punto-pendiente, principal*** *y* ***general****, respectivamente.*

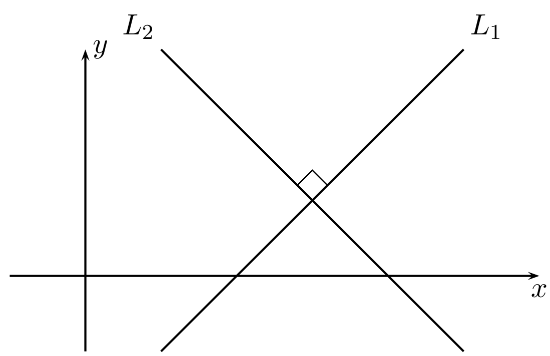
Ojo 7 *Si* n *es el coeficiente de posición, entonces la recta interseca al eje* y *en* $(0, n)$.

4. Ángulos entre rectas

Dos rectas son paralelas si y sólo si sus pendientes son iguales. Sean L_1 y L_2 rectas de pendientes m_1 y m_2 respectivamente. Entonces

$$L_1 // L_2 \iff m_1 = m_2.$$





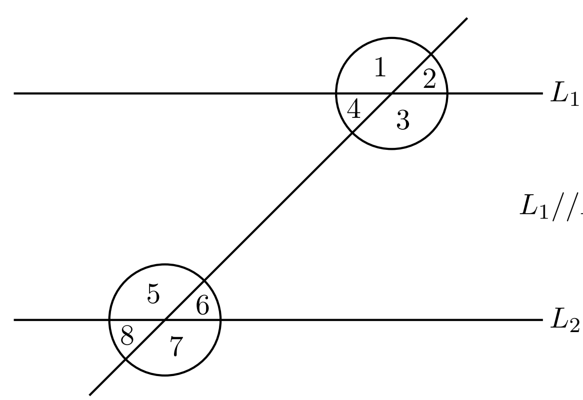
Dos rectas son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es -1. Sean L_1 y L_2 rectas de pendientes m_1 y m_2 respectivamente. Entonces

$$L_1 \perp L_2 \iff m_1 \cdot m_2 = -1.$$

Sean L_1 y L_2 dos rectas paralelas, entonces se cumple que

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3 = \sphericalangle 5 = \sphericalangle 7$$

$$\sphericalangle 2 = \sphericalangle 4 = \sphericalangle 6 = \sphericalangle 8$$



5. Ejercicios

Sin calculadora. Marcar sólo 1 alternativa.

1. Sean a y b números enteros, de modo que $a > b$. Entonces, el punto D cuyas coordenadas son $(a-b, b-a)$ se ubica en

   a) el primer cuadrante.

   b) el segundo cuadrante.

   c) el origen del sistema.

   d) el tercer cuadrante

   e) el cuarto cuadrante.

2. ¿Cuánto mide el radio de una circunferencia de diámetro $\overline{AB}$ determinado por los puntos $A(-1,-5)$ y $B(-7,3)$?

   a) 5

   b) $2\sqrt{2}$

   c) $\sqrt{10}$

   d) $4\sqrt{2}$

   e) 10

3. En la circunferencia del ejercicio anterior, ¿cuáles son las coordenadas del centro?

   a) $(-8,-2)$

   b) $(-4,-1)$

   c) $(-3,-4)$

   d) $\left(-\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

   e) $\left(-\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

4. La pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(1,-1)$ y $B(-6,7)$ es

   a) $-\frac{6}{5}$

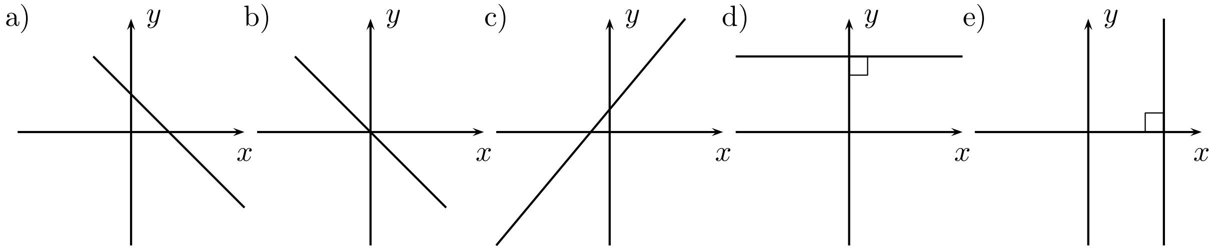
   b) $-\frac{6}{7}$

c) $-\dfrac{7}{8}$

d) $-\dfrac{8}{5}$

e) $-\dfrac{8}{7}$

5. ¿Cuál de los siguientes gráficos muestra una recta de pendiente positiva?



6. Si los puntos $A(2,3), B(3,-2)$ y $C(a,8)$ son colineales, entonces $a =$

   a) 5
   b) 3
   c) 1
   d) -3
   e) -7

7. Dados los puntos $A(2,5), B(-1,-4), C(3,-1)$ y $D(k,-3)$, ¿cuánto debe ser el valor de k para que el producto de las pendientes de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ sea -1?

   a) -9
   b) -3
   c) 3
   d) 9
   e) 15

8. La ecuación de la recta que pasa por el punto $(4, -3)$ y tiene pendiente $-\frac{2}{3}$ es

   a) $2x + 3y + 17 = 0$

   b) $2x + 3y - 17 = 0$

   c) $2x + 3y - 6 = 0$

   d) $2x - 3y - 1 = 0$

   e) $2x + 3y + 1 = 0$

9. La ecuacion de la recta que pasa por los puntos $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(-2, \frac{-3}{2}\right)$ es

   a) $y = \frac{3}{2}x - 1$

   b) $y = -\frac{3}{2}x + 2$

   c) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{6}$

   d) $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$

   e) $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

10. ¿Qué valor debe tener k para que las rectas $2x + ky = 0$ y $3x - 5y = 6$ sean perpendiculares?

    a) $-\frac{10}{3}$

    b) $-\frac{6}{5}$

    c) $\frac{6}{5}$

    d) $\frac{5}{4}$

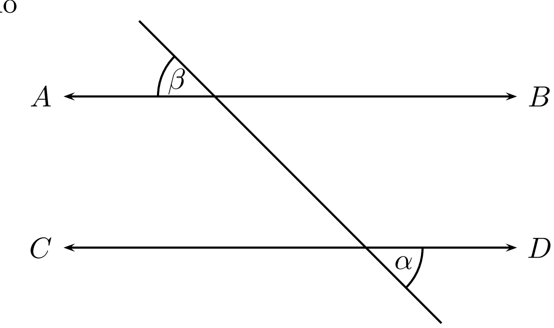
    e) $\frac{10}{3}$

11. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto $(4,-1)$ y es paralela a la recta $2y - x + 8 = 0$?

    a) $x - 2y - 2 = 0$
    b) $2x + y - 7 = 0$
    c) $x - 2y + 6 = 0$
    d) $x - 2y - 6 = 0$
    e) $x - 2y + 9 = 0$

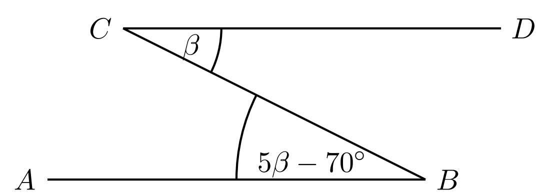
12. En la figura, $\overline{AB}//\overline{CD}$. Si $\alpha = 6\beta - 280^{o}$, entonces, la clasificacion del angulo β corresponde a un ángulo

    a) agudo.
    b) recto.
    c) obtuso.
    d) extendido.
    e) completo.



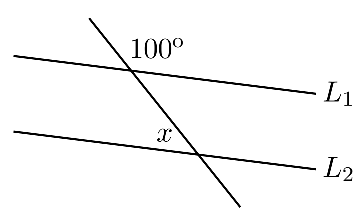
13. En la figura, $\overline{AB}//\overline{CD}$. ¿Cuánto mide β?

    a) 15^{o}
    b) 20^{o}
    c) 25^{o}
    d) 30^{o}
    e) $22{,}5^{o}$

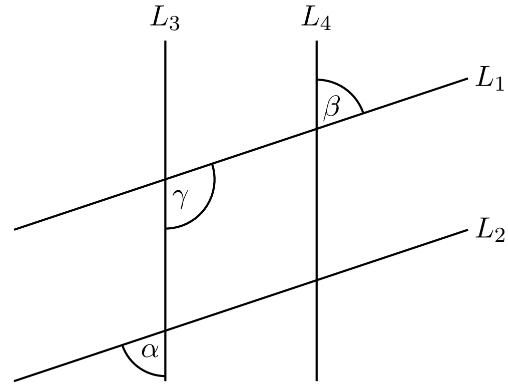


14. En la figura, $L_1//L_2$. Luego, el valor del suplemento de $\sphericalangle x$ es

    a) 60^{o}
    b) 70^{o}
    c) 80^{o}
    d) 100^{o}
    e) 120^{o}



15. En la figura, $L_1//L_2, L_3//L_4$ y $\alpha + \beta = 50°$. Entonces, el suplemento de β es



a) 25º

b) 50º

c) 90º

d) 130º

e) 155º

16. ¿Cuál de los siguientes puntos pertenece a la recta de ecuación $4x - 3y + 2 = 0$?

a) $(5, 6)$

b) $(4, -6)$

c) $(1, -2)$

d) $(-2, -2)$

e) $(3, 4)$

17. ¿Qué valor debe tener k para que la recta $(k-1)x + (2k+1)y - 1 = 0$ pase por el punto $(2, 1)$?

a) 2

b) $\frac{1}{2}$

c) 0

d) $-\frac{1}{2}$

e) -2

18. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s) con respecto a la recta $2y + 3x - 12 = 0$?

I) La recta intersecta al eje x en el punto $(4, 0)$.
II) La recta intersecta al eje y en el punto $(0, 6)$.
III) La pendiente de la recta es negativa.

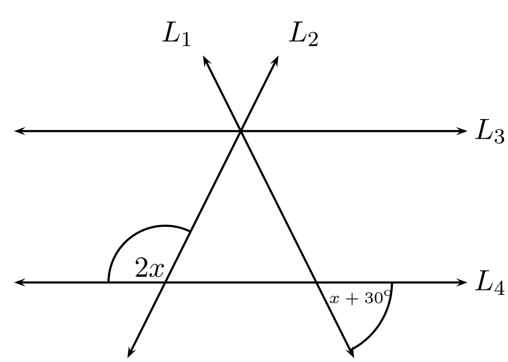
a) Sólo III
b) Sólo I y II
c) Sólo I y III
d) Sólo II y III
e) I, II y III

19. Si la pendiente de una recta es -3 y su coeficiente de posición es 2, su ecuación general es

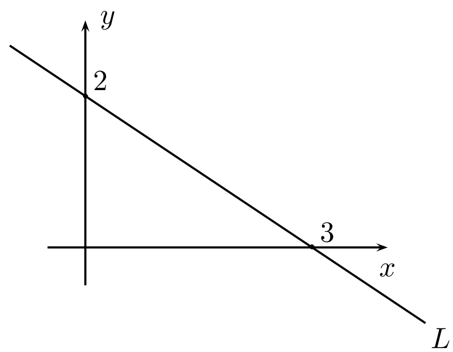
a) $3x + y + 2 = 0$
b) $3x - y - 2 = 0$
c) $3x + y - 2 = 0$
d) $3x - y + 2 = 0$
e) $2x - y - 3 = 0$

20. En la figura, L_1, L_2, L_3 y L_4 son rectas tales que $L_3 // L_4$ y L_3 es bisectriz del ángulo obtuso formado por L_1 y L_2. La medida de $\sphericalangle x$ es

a) 20^{o}
b) 30^{o}
c) 50^{o}
d) 60^{o}
e) 70^{o}



21. Según el gráfico de la figura, la ecuación de la recta L es



a) $2x + 3y = 0$

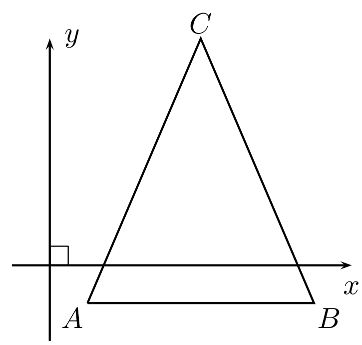
b) $3x + 2y - 6 = 0$

c) $3x + 2y - 4 = 0$

d) $2x - 3y + 6 = 0$

e) $2x + 3y - 6 = 0$

22. En el triángulo ABC, $\overline{AB} // \overrightarrow{OX}$. Si m_1, m_2 y m_3 son las pendientes de $\overline{AB}, \overline{BC}$ y $\overline{CA}$, respectivamente, entonces un orden creciente está representado por



a) $m_1 < m_2 < m_3$

b) $m_3 < m_1 < m_2$

c) $m_2 < m_1 < m_3$

d) $m_2 < m_3 < m_1$

e) $m_3 < m_2 < m_1$

23. ¿Cuáles son, respectivamente, los valores de la pendiente y del coeficiente de posición de la recta $3x + 2y + 6 = 0$?

a) -3 y -6.

b) $-\dfrac{3}{2}$ y 3.

c) $\dfrac{3}{2}$ y -3.

d) $-\dfrac{3}{2}$ y -3.

e) $\dfrac{3}{2}$ y 3.

24. La ecuación de la recta que pasa por el punto $(5,1)$ y de pendiente $-\dfrac{1}{3}$ es

   a) $x+3y-16=0$
   b) $x+3y-8=0$
   c) $x+3y+2=0$
   d) $x-3y+8=0$
   e) $x+3y-2=0$

25. La ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-2,4)$ y $B(-7,-12)$ es

   a) $16x-9y+4=0$
   b) $16x+5y+12=0$
   c) $5x-16y+74=0$
   d) $16x-5y-74=0$
   e) $16x-5y+52=0$

26. ¿Cuál de las siguientes rectas del plano cartesiano es representada por la ecuación $y-b=0$?

   a) La recta paralela al eje y que pasa por el punto $(b,0)$.
   b) La recta paralela al eje y que pasa por el punto $(0,b)$.
   c) La recta paralela al eje x que pasa por el punto $(b,0)$.
   d) La recta paralela al eje x que pasa por el punto $(0,b)$.
   e) La recta que pasa por los puntos $(0,0)$ y (b,b).

27. El punto P de ordenada 10 está en la recta cuya pendiente es 3 y que pasa por el punto $A(7,-2)$. Entonces, la abscisa de P es

   a) 11.
   b) $\dfrac{29}{3}$.
   c) 7
   d) -1
   e) -3

28. En una panadería la relación entre el costo de fabricación del pan y su precio de venta es lineal. El costo de un kilogramo de pan blanco es de \$320 y se vende en \$600; un kilogramo de pan dulce tiene un costo de \$680 y se vende en \$1.050. Si el costo de un kilogramo de pan negro es de \$340, ¿cuál es su precio de venta?

    a) $\$637,5$
    b) \$625
    c) \$620
    d) \$616
    e) \$525

29. Se puede determinar la pendiente de una recta L si:

    (1) La recta L pasa por el punto $(-2, 0)$.
    (2) El ángulo formado por la recta L y el eje x es 45°.

    a) (1) por sí sola.
    b) (2) por sí sola.
    c) Ambas juntas, (1) y (2).
    d) Cada una por si sola, (1) ó (2).
    e) Se requiere información adicional.

30. Se puede determinar la ecuación de una recta si:

    (1) Se conoce la pendiente y el punto donde la recta corta al eje y.
    (2) Se conoce la distancia entre dos puntos de ella.

    a) (1) por sí sola.
    b) (2) por sí sola.
    c) Ambas juntas, (1) y (2).
    d) Cada una por si sola, (1) ó (2).
    e) Se requiere información adicional.

1 E	2 A	3 B	4 E	5 C
6 C	7 C	8 E	9 D	10 C
11 D	12 A	13 E	14 D	15 E
16 D	17 B	18 E	19 C	20 C
21 E	22 C	23 D	24 B	25 E
26 D	27 A	28 B	29 B	30 A