

# GUÍA PRÁCTICA: N° 2

## SEMEJANZA DE FIGURAS PLANAS

### 1. Proporcionalmente iguales...

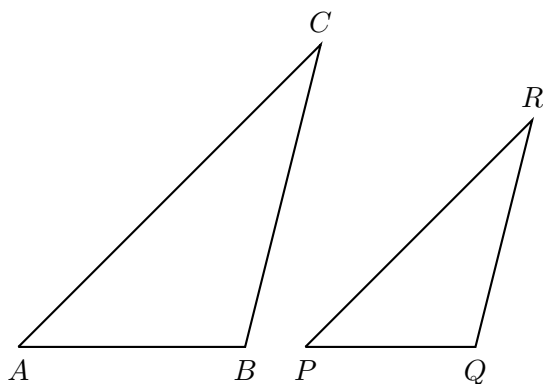
En Geometría, diremos que dos figuras son **semejantes** ( $\sim$ ) si y sólo si tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño, es decir, una corresponde a una "ampliación" de la otra.

**Ojo 1** *Si dos polígonos regulares tienen igual número de lados, entonces son semejantes.*

**Ojo 2** *Toda circunferencia es semejante a otra circunferencia.*

**Ojo 3** *La congruencia es un caso particular de la semejanza.*

Para la PSU, nos interesa en particular la **semejanza de triángulos**. Diremos que dos triángulos son semejantes cuando los ángulos de uno de ellos sean respectivamente congruentes con los ángulos del otro y además, tengan sus lados homólogos proporcionales.

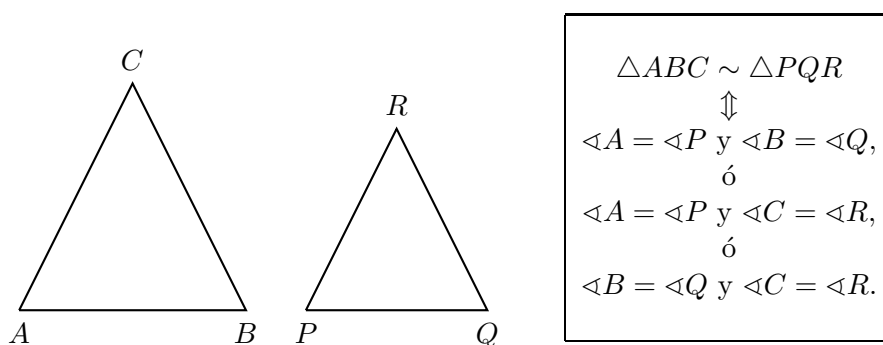


$$\begin{aligned} \triangle ABC &\sim \triangle PQR \\ &\Downarrow \\ \sphericalangle A = \sphericalangle P, \sphericalangle B = \sphericalangle Q, \sphericalangle C = \sphericalangle R \\ \frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} &= \frac{\overline{BC}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{RP}} \end{aligned}$$

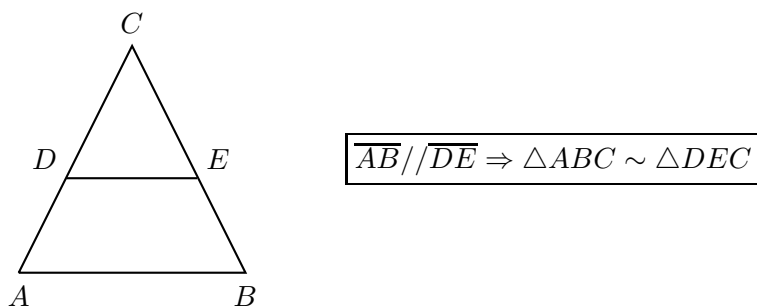
## 2. Teoremas de Semejanza

Sin embargo, para probar que dos triángulos son semejantes no es necesario probar estas seis propiedades.

Según el **teorema fundamental de la semejanza de triángulos**, para que dos triángulos sean semejantes, basta que cada uno posea dos ángulos congruentes.

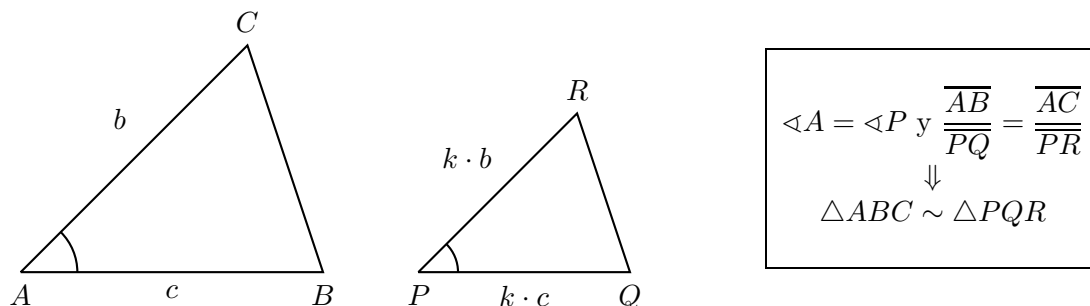


**Ojo 4** Una consecuencia de esto es que cualquier paralela a un lado del triángulo genera otro triángulo semejante al original.

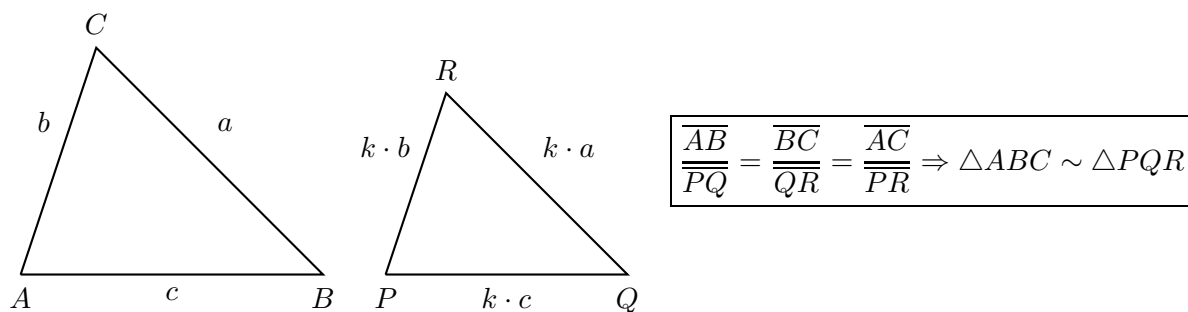


También existen otros teoremas que nos ahorran el tener que probar estas seis propiedades:

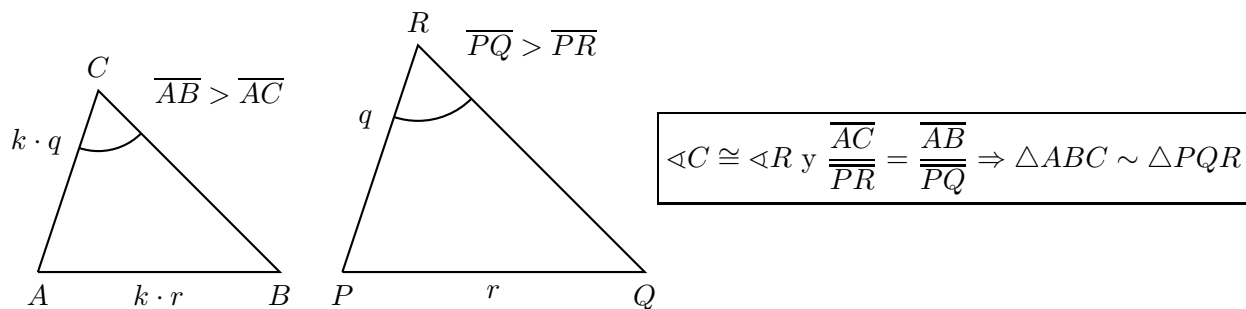
1. Para que dos triángulos sean semejantes, basta que tengan un **ángulo congruente comprendido entre lados proporcionales**.



2. Para que dos triángulos sean semejantes, basta que tengan sus **lados proporcionales**.



3. Para que dos triángulos sean semejantes, basta que tengan **dos de sus lados respectivamente proporcionales, y los ángulos opuestos a los mayores de estos lados, congruentes**.

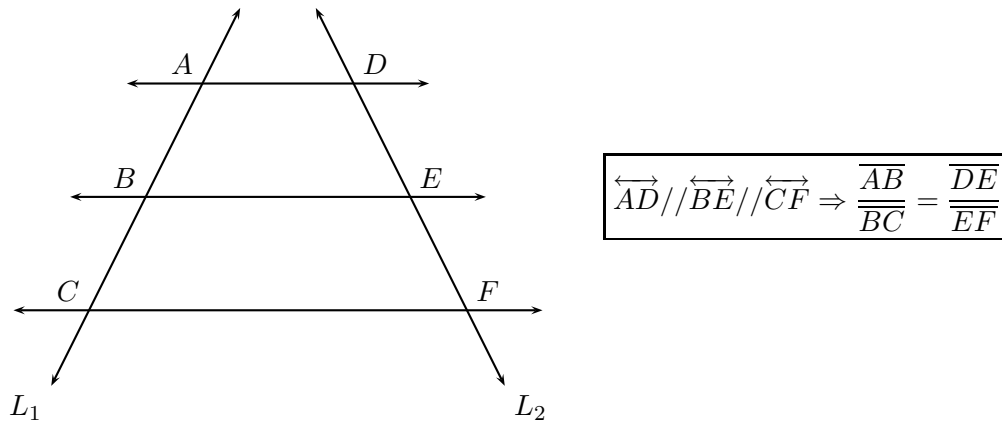


**Ojo 5** Si dos triángulos son semejantes entonces sus transversales de gravedad, alturas, perímetros, etc. se encuentran en la misma razón que sus lados.

**Ojo 6** Si dos triángulos son semejantes entonces la razón entre sus áreas es igual al cuadrado de la razón entre sus lados.

### 3. Teorema de Thales

Si dos rectas se cortan por tres o más paralelas, los segmentos determinados en una de ellas son, respectivamente, proporcionales a los segmentos determinados en la otra.



**Ojo 7** La igualdad también se puede escribir como  $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$ .

**Ojo 8** Si en la igualdad anterior sumamos un 1 a cada lado

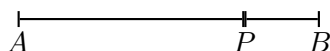
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + 1 = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} + 1 \Rightarrow \frac{\overline{AB} + \overline{BC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE} + \overline{EF}}{\overline{EF}}.$$

Pero  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$  y  $\overline{DE} + \overline{EF} = \overline{DF}$ , por lo tanto

$$\boxed{\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}}$$

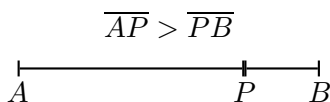
## 4. División de un Trazo

Diremos que un punto  $P \in \overline{AB}$  lo divide en la razón  $m : n$ , si  $\overline{AP} : \overline{PB} = m : n$ .



$$\boxed{\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{m}{n}}$$

Si al dividir el trazo se cumple que la razón entre el trazo entero y el segmento mayor es igual a la razón entre el segmento mayor y el menor, entonces diremos que se encuentra en razón **áurea** o **divina**.



$$\boxed{\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}}$$

**Ojo 9** El valor numérico de la razón áurea es el número irracional conocido como **número áureo**. Su valor corresponde a

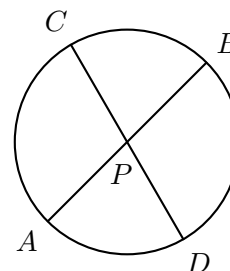
$$\phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1,618034.$$

## 5. Proporcionalidad en la Circunferencia

### 5.1. Teorema de las Cuerdas

Si dos cuerdas de una circunferencia se cortan en el interior de ella, el producto de los segmentos determinados en una de ellas es igual al producto de segmentos determinados en la otra

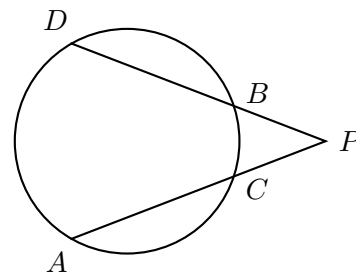
$$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}.$$



### 5.2. Teorema de las secantes

Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos secantes, el producto de una de ellas por su segmento exterior es igual al producto de la otra secante por su segmento exterior

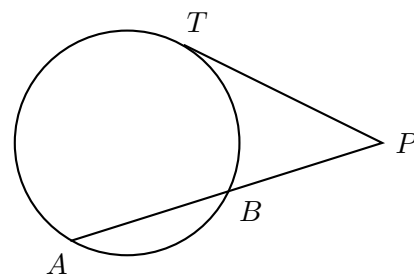
$$\overline{PA} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD}.$$



### 5.3. Teorema de la tangente y la secante

Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan una tangente y una secante, la longitud de la tangente es el producto entre la longitud de la secante y su segmento exterior.

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2.$$

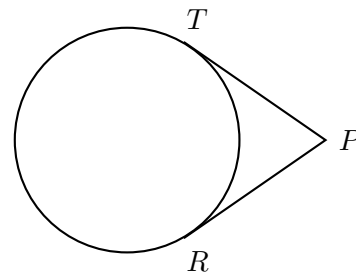


**Ojo 10** El teorema de la tangente y la secante puede ser visto como el teorema de las secantes cuando  $\overline{BD} = 0$ .

### 5.4. Teorema de las tangentes

Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos tangentes, las longitudes de ambas tangentes son iguales.

$$\overline{PR} = \overline{PT}.$$



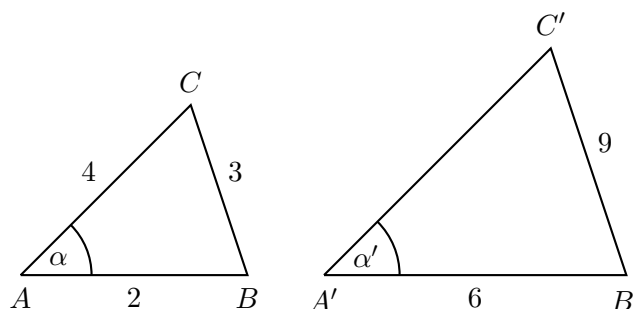
**Ojo 11** Una consecuencia del teorema de las tangentes es que al inscribir una circunferencia dentro de cualquier polígono los segmentos que concurren a un mismo vértice son iguales.

## 6. Ejercicios

Sin calculadora. Marcar sólo 1 alternativa.

1. Si en la figura,  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ , entonces  $\alpha$  es

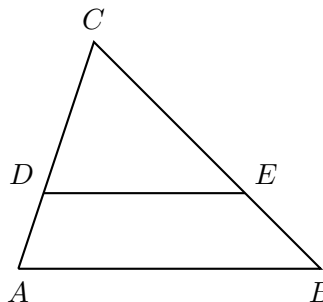
- a) igual a  $\alpha'$ .
- b) un cuarto de  $\alpha'$ .
- c) un tercio de  $\alpha'$ .
- d) el doble de  $\alpha'$ .
- e) el triple de  $\alpha'$ .



2. Los lados de un triángulo miden 30 cm, 50 cm y 60 cm. ¿Cuánto mide el lado más largo de un triángulo semejante con él y cuyo lado menor mide 20 cm?
- a) 30 cm
  - b) 40 cm
  - c) 50 cm
  - d) 60 cm
  - e) 70 cm

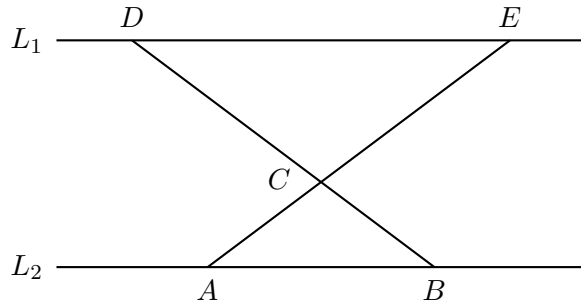
3. En la figura, el trazo  $\overline{DE}$  es paralelo al lado  $\overline{AB}$  del triángulo  $ABC$ . Entonces, el triángulo  $CDE$  es semejante al triángulo  $ABC$  en su orden

- a)  $BAC$
- b)  $CBA$
- c)  $CAB$
- d)  $BCA$
- e)  $ABC$



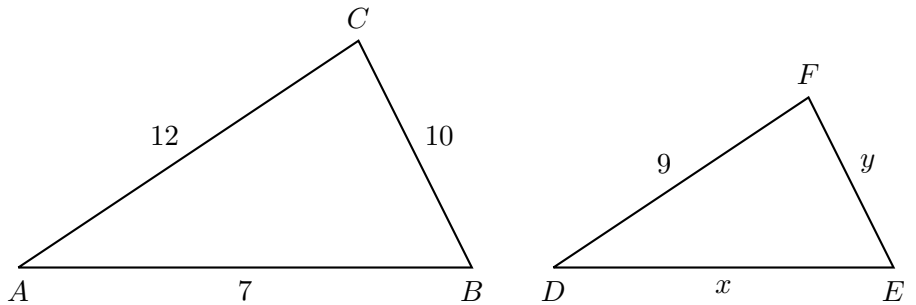
4. Las rectas  $L_1$  y  $L_2$  de la figura, son paralelas y los trazos  $\overline{DB}$  y  $\overline{AE}$  se cortan en  $C$ . Entonces, el triángulo  $ABC$  es semejante al triángulo  $DEC$  en su orden

- a)  $DCE$
- b)  $EDC$
- c)  $DEC$
- d)  $ECD$
- e)  $CED$



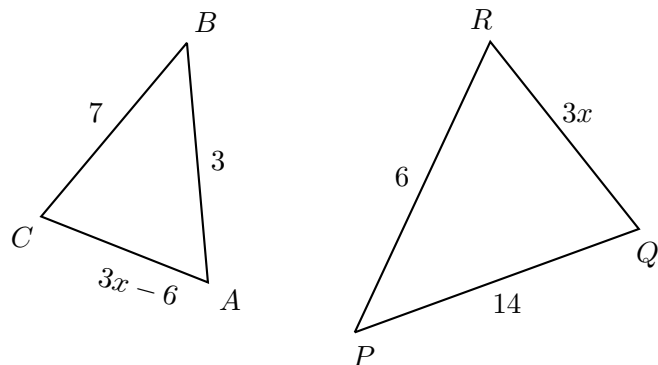
5. Sea  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  y las longitudes de los lados sean las indicadas en la figura. ¿Cuál es la longitud de  $(x + y)$ ?

- a)  $\frac{21}{4}$
- b)  $\frac{27}{4}$
- c)  $\frac{30}{4}$
- d)  $\frac{51}{4}$
- e)  $\frac{61}{4}$



6. Según los datos dados en la figura, ¿cuál es la longitud de  $\overline{AC}$  si  $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}$ ?

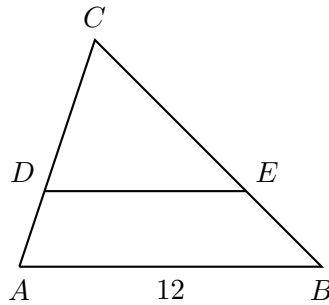
- a) 10
- b) 8
- c) 6
- d) 3,9
- e) 1,3





7. En la figura, el trazo  $\overline{DE} // \overline{AB}$ ,  $\overline{CB} = 16$ ,  $\overline{AC} = 8$  y  $\overline{DC} = 6$ . ¿Cuál es el perímetro del  $\triangle CDE$ ?

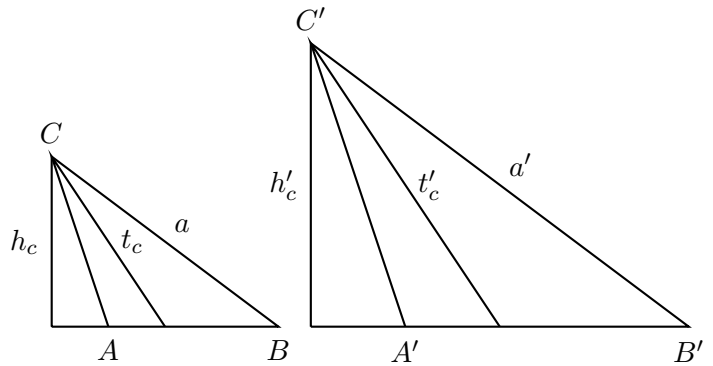
- a) 36
- b) 32
- c) 27
- d) 21
- e) 18



8. Los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  de la figura, son semejantes.  $S$  y  $S'$  representan las áreas del primer y segundo triángulo respectivamente. Si  $S : S' = 1 : 4$ , ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) falsa(s)?

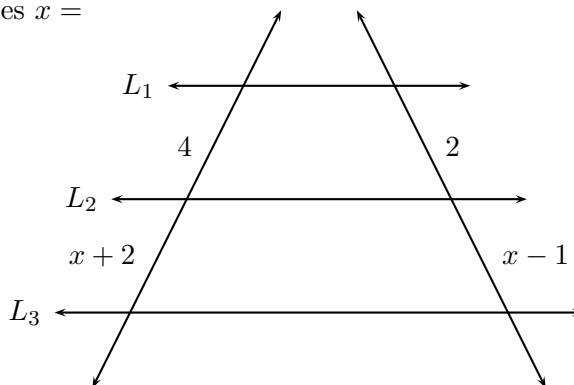
- I)  $a : a' = 1 : 2$
- II)  $h_c : h'_c = 1 : 4$
- III)  $h_c : h'_c = t_c : t'_c$

- a) Sólo I
- b) Sólo II
- c) Sólo III
- d) Sólo I y III
- e) I, II y III



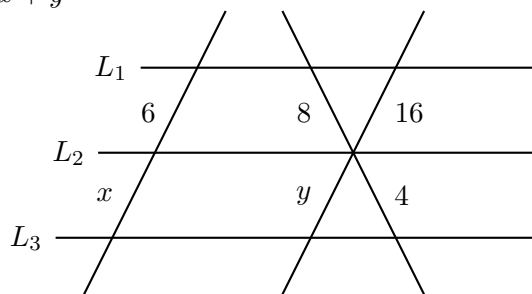
9. En la figura,  $L_1 // L_2 // L_3$ , entonces  $x =$

- a) 0
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 6



10. Si en la figura,  $L_1 // L_2 // L_3$ , entonces  $x + y =$

- a) 24
- b) 11
- c) 8
- d) 5
- e) 3



11. Un punto  $P$  divide interiormente a un segmento  $\overline{AB}$  en la razón  $5 : 3$ . Si  $\overline{PB} = 36$  cm, ¿cuánto mide  $\overline{AB}$ ?

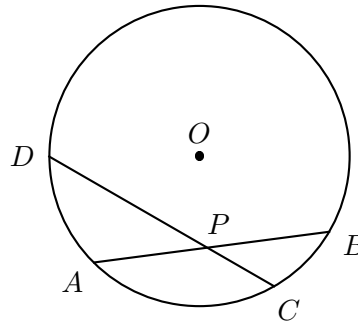
- a) 12 cm
- b) 48 cm
- c) 60 cm
- d) 72 cm
- e) 96 cm

12. Un punto  $Q$  divide en razón áurea a un trazo  $\overline{CD}$ , con  $CQ > QD$ . Si  $\overline{CD} = 10$  cm y  $\overline{CQ} = x$ , entonces la ecuación para determinar  $x$  es

- a)  $x^2 + 10x - 100 = 0$
- b)  $x^2 - 10x + 100 = 0$
- c)  $x^2 - 10x - 100 = 0$
- d)  $x^2 + 10x + 100 = 0$
- e)  $x^2 + x - 100 = 0$

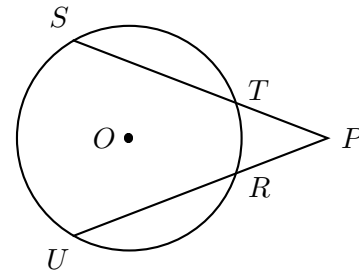
13. En la circunferencia de centro  $O$ ,  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  son cuerdas que se intersectan en  $P$ . Si  $\overline{AP} = 9$  cm,  $\overline{PB} = 12$  cm y  $\overline{CP} = 18$  cm, entonces  $\overline{PD}$  mide

- a) 24 cm
- b) 21 cm
- c) 13,5 cm
- d) 6 cm
- e) 3 cm



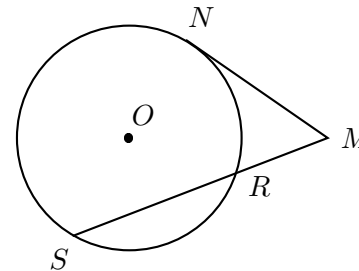
14. En la figura,  $\overline{PS}$  y  $\overline{PU}$  son secantes a la circunferencia de centro  $O$ . Si  $\overline{PR} = \overline{RS} = 14$  y  $\overline{PT} = 8$ , entonces  $\overline{TU}$  es igual a

- a) 8
- b) 14
- c) 20
- d) 33
- e) 41



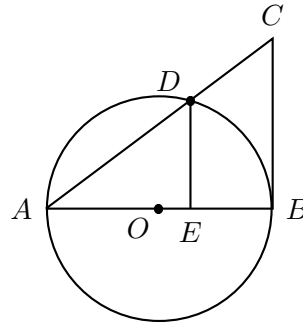
15. En la circunferencia de centro  $O$ ,  $\overline{MN}$  es tangente en  $N$  y  $\overline{MS}$  es secante. Si  $\overline{MR} = 3$  cm y  $\overline{RS} = 45$  cm, entonces la tangente  $MN$  mide

- a) 12 cm
- b) 21 cm
- c) 36 cm
- d) 45 cm
- e) 144 cm



16. En la figura,  $\overline{AD} = 16$  cm y  $\overline{DC} = 9$  cm. Si el segmento  $\overline{DE}$  es paralelo a la tangente  $\overline{BC}$ , ¿cuál es la medida del segmento  $\overline{DE}$ ?

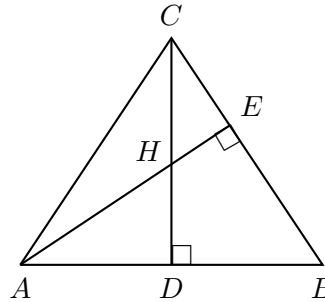
- a) 20 cm
- b) 12 cm
- c) 9,6 cm
- d)  $8\sqrt{2}$  cm
- e) 3,2 cm



17. En el  $\triangle ABC$  de la figura, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

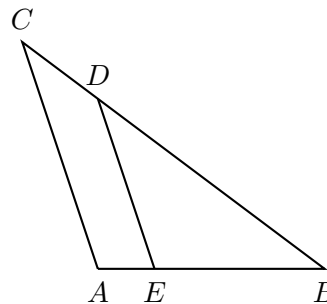
- I)  $\triangle AHD \sim \triangle CHE$
- II)  $\triangle ADC \sim \triangle BDC$
- III)  $\triangle AEB \sim \triangle CDB$

- a) Sólo I
- b) Sólo I y II
- c) Sólo I y III
- d) Sólo II y III
- e) I, II y III



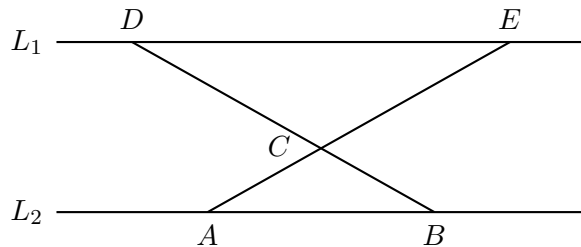
18. En la figura, el trazo  $\overline{DE}$  es paralelo al lado  $\overline{AC}$  del triángulo  $ABC$ . Si  $\overline{AB} = 14$  cm,  $\overline{AC} = 21$  cm y  $\overline{AE} = 8$  cm, entonces  $\overline{DE} =$

- a) 6 cm
- b) 7 cm
- c) 8 cm
- d) 9 cm
- e) 12 cm



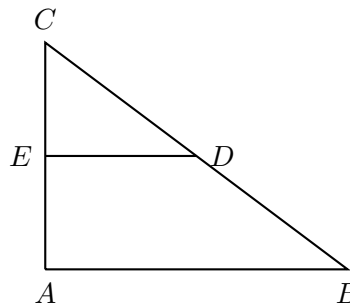
19. Las rectas  $L_1$  y  $L_2$  de la figura, son paralelas y los trazos  $\overline{DB}$  y  $\overline{AE}$  se cortan en  $C$ . Si  $\overline{AC} = 6$  cm,  $\overline{AB} = 10$  cm y  $\overline{CE} = 9$  cm, entonces  $\overline{ED} =$

- a) 12 cm
- b) 13 cm
- c) 14 cm
- d) 15 cm
- e) 18 cm



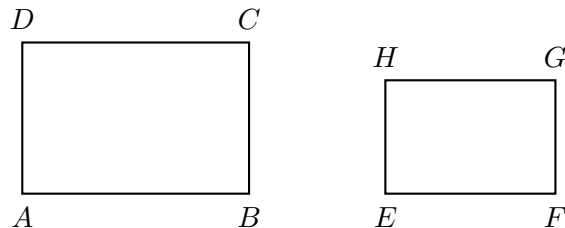
20. En el  $\triangle ABC$  rectángulo en  $C$  de la figura,  $\overline{DE} \perp \overline{BC}$ . Si  $\overline{ED} = 8$ ,  $\overline{BD} = 10$  y  $\overline{DA} = 20$ , ¿cuánto mide el perímetro del trapecio  $CADE$ ?

- a) 56
- b) 62
- c) 64
- d) 70
- e) 192



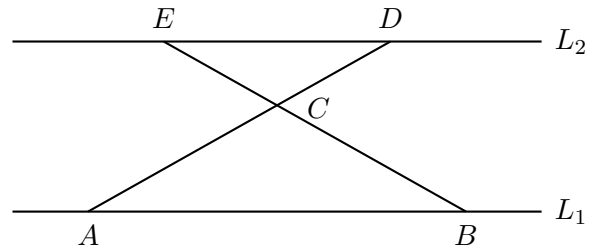
21. Los rectángulos de la figura, son semejantes. Si  $\overline{FG} = 20$  cm,  $\overline{GH} = 30$  cm y el perímetro del rectángulo  $ABCD$  es de 360 cm, entonces su lado menor mide

- a) 72 cm
- b) 108 cm
- c) 144 cm
- d) 216 cm
- e) ninguna de las anteriores.



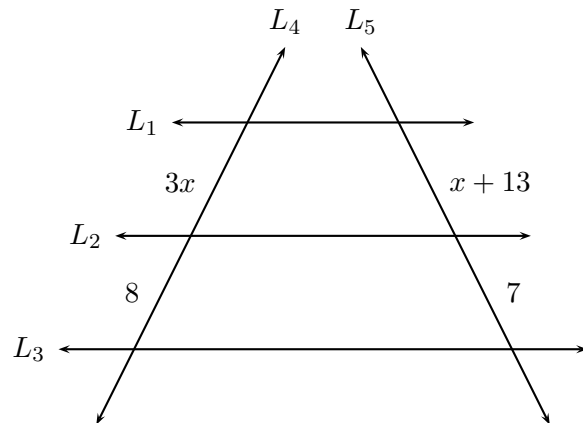
22. En la figura,  $L_1 // L_2$ . Si  $\overline{EC} = 36$  cm y  $\overline{CB} = 81$  cm, entonces  $\frac{\text{Área}(\triangle CDE)}{\text{Área}(\triangle ABC)} =$

- a)  $\frac{4}{9}$
- b)  $\frac{2}{3}$
- c)  $\frac{16}{81}$
- d)  $\frac{9}{4}$
- e)  $\frac{3}{2}$



23. En la figura, las rectas  $L_4$  y  $L_5$  intersecan a las rectas paralelas  $L_1, L_2$  y  $L_3$ . ¿Cuál es el valor de  $x$ ?

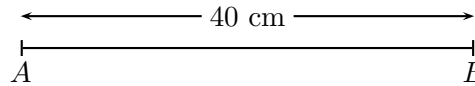
- a) 0,4
- b) 1
- c) 3,5
- d) 5
- e) 8



24. El trazo  $\overline{AB}$  se divide interiormente en la razón 2 : 3, siendo  $P$  el punto de división del trazo. A continuación el trazo  $\overline{PB}$  se divide interiormente en la razón 1 : 2, siendo  $Q$  el punto de división  $\overline{PB}$ . Con esta información se puede determinar ¿cuál(es) de las siguientes proposiciones que es (son) verdadera(s)?

I)  $\overline{AP} = \overline{QB}$     II)  $\overline{AQ} = \overline{PB}$     III)  $\overline{AQ} > \overline{QB}$

- a) Sólo I  
 b) Sólo III  
 c) Sólo I y II  
 d) Sólo II y III  
 e) I, II y III

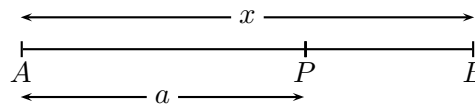


25. A la misma hora, un edificio y un semáforo de 3 m de altura, proyectan una sombra de 60 m y 150 cm, respectivamente. ¿Cuánto es la altura del edificio?

- a) 30 m  
 b) 90 m  
 c) 120 m  
 d) 150 m  
 e) 180 m

26. Si  $P$  divide en sección áurea al trazo  $\overline{AB}$  de la figura, siendo  $\overline{AP} > \overline{PB}$ , entonces se cumple que

- a)  $x^2 - ax + a^2 = 0$   
 b)  $x^2 + ax - a^2 = 0$   
 c)  $x^2 + ax + a^2 = 0$   
 d)  $x^2 - ax - a^2 = 0$   
 e)  $x^2 - ax - 2a = 0$

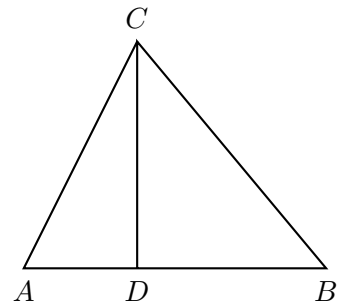


27. Se puede determinar en que razón se encuentran las áreas de dos triángulos semejantes si:

- (1) Sus perímetros están en la razón 2 : 3.
  - (2) El perímetro del triángulo más pequeño es 40 cm.
- a) (1) por sí sola.
  - b) (2) por sí sola.
  - c) Ambas juntas, (1) y (2).
  - d) Cada una por si sola, (1) ó (2).
  - e) Se requiere información adicional.

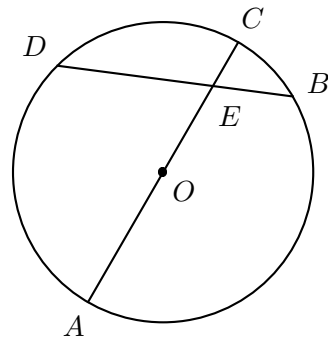
28. En el  $\triangle ABC$ , el  $\triangle ADC$  es semejante al  $\triangle CDB$  si:

- (1)  $\sphericalangle ACB$  es recto.
  - (2)  $\overline{CD}$  es altura.
- a) (1) por sí sola.
  - b) (2) por sí sola.
  - c) Ambas juntas, (1) y (2).
  - d) Cada una por si sola, (1) ó (2).
  - e) Se requiere información adicional.



29. En la circunferencia de centro  $O$  de la figura,  $\overline{AC}$  y  $\overline{DB}$  son cuerdas. Se puede determinar el valor numérico del radio de la circunferencia si:

- (1)  $\overline{DE} = \overline{EB} = 4$  cm
  - (2)  $\overline{CE} = 2$  cm
- a) (1) por sí sola.
  - b) (2) por sí sola.
  - c) Ambas juntas, (1) y (2).
  - d) Cada una por si sola, (1) ó (2).
  - e) Se requiere información adicional.

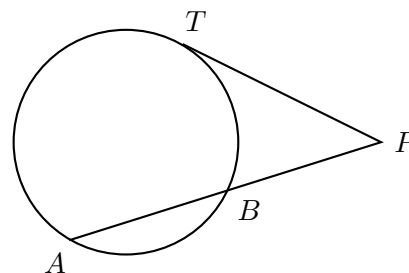




30. En la figura,  $\overline{PT}$  es tangente a la circunferencia y  $\overline{PB} = 8$  cm. Se puede determinar el valor de  $\overline{PT}$  si:

- (1)  $\overline{AB} = 10$  cm
- (2)  $\overline{PB} : \overline{BA} = 4 : 5$

- a) (1) por sí sola.
- b) (2) por sí sola.
- c) Ambas juntas, (1) y (2).
- d) Cada una por si sola, (1) ó (2).
- e) Se requiere información adicional.



1 A	2 B	3 C	4 B	5 D
6 C	7 C	8 B	9 D	10 B
11 E	12 A	13 D	14 E	15 A
16 C	17 C	18 D	19 D	20 C
21 A	22 C	23 E	24 E	25 C
26 D	27 A	28 C	29 C	30 D