Fuente: Universidad Católica de Chile

Guía de Aprendizaje n° 7

Plan Biólogo II 2011

LENGUAJE ALGEBRAICO

1. Las letras en Matemática

Así como para expresarnos utilizamos el Español, en Matemática se utiliza el **álgebra**. Aquí las letras, así como las hemos estado usando hasta ahora, representan un número y por lo tanto, operamos con ellas al igual que lo haríamos con números. La diferencia está, que cuando trabajamos con álgebra, podemos generalizar las cosas y estudiarlas a un nivel mayor.

Veamos cómo traducir algunas oraciones a lenguaje algebráico

El doble de x:	$2x$
La mitad de x:	$x/2$
El cuadrado de x:	x^2
El triple de x:	$3x$
Un tercio de x:	$x/3$
El cubo de x:	x^3
El cuádruplo de x:	$4x$
La cuarta parte de x:	$x/4$
La cuarta potencia de x:	x^4
La diferencia entre a y b:	$a-b$
La diferencia entre b y a:	$b-a$
La semisuma de a y b:	$(a+b)/2$
La semidiferencia de a y b:	$(a-b)/2$
x aumentado en a unidades:	$x+a$
x disminuido en a unidades:	$x-a$
x es a unidades mayor que y:	$x-y=a$
x es a unidades menor que y:	$y-x=a$
El producto de a y b:	$a\cdot b$
x veces a:	$x\cdot a$
El cuociente entre a y b:	a/b

Ojo 1 *De ahora en adelante $a\cdot b=ab$. En álgebra no se escribe el $\cdot$ para multiplicar a menos que sea necesario para evitar confusiones.*

Ojo 2 *Siempre, a menos que se indique lo contrario, $a\frac{b}{c}=a\cdot\frac{b}{c}$ y no $a+\frac{b}{c}$, como lo hacíamos con fracciones.*

2. Polinomios

Los **polinomios** son expresiones en álgebra de productos que suman.

Se pueden clasificar según la cantidad de términos en:

1. Monomios: Poseen un solo término, es decir, no hay suma presente. Por ejemplo: ab.

2. Binomios: Dos monomios unidos por una suma. Por ejemplo: $ab + cd$.

3. Trinomios: Un binomio y un monomio unidos por una suma. Por ejemplo: $ab + bc + ac$.

4. Polinomios: Más de 3 monomios unidos. Por ejemplo: $ab+cb+ac+abc$.

O según el mayor grado de las potencias de sus término en:

1. De primer grado: Todos los términos están elevados a lo más a 1. Por ejemplo: $ab + cx$.

2. De segundo grado: Hay al menos un término elevado al cuadrado. Por ejemplo: $ax^2 + cx$.

3. De n-ésimo grado: Hay al menos un término elevado a n. Por ejemplo: $ax^n + bx + ac$.

Ojo 3 *Los números que van a acompañando a las letras se conocen como **coeficientes**, mientras que a las letras se les conoce como **parte literal**.*

3. Paréntesis

Al igual que antes, los **paréntesis** cumplen un rol muy importante cuando trabajamos con álgebra. Las cosas que estan entre paréntesis no se pueden "tocar", a menos que hagamos desaparecer el paréntesis de forma adecuada.

La propiedad que trabaja con los paréntesis es la **distributividad**. Es decir, cuando tenemos una expresión de la forma $a(b+c)$, hay 2 opciones: sumar lo que está dentro del paréntesis y luego multiplicarlo por a o que el a ingrese dentro del paréntesis y multiplique a ambos para luego sumar los resultados. Veremos que dependiendo de cada caso, convendrá usar una o la otra.

Por otro lado, los números pueden entrar como salir del paréntesis. Cuando sacamos un número del paréntesis se dice que **factorizamos**, esto es, cuando tenemos una expresión de la forma $(ab + ac)$ podemos sacar el a fuera del paréntesis y obtener $a(b + c)$.

Ojo 4 *Podemos factorizar **SÓLO** si el número que queremos sacar del paréntesis esta repetido en **TODOS** los números al interior del paréntesis.*

Ojo 5 *Un "truco"muy usado es*

$$-(a-b) = (-1)\cdot(a-b) = ((-1)\cdot a-(-1)\cdot b) = (-a--b) = (-a+b) = (b-a).$$

Se utiliza por ejemplo para simplificar

$$\frac{a-b}{b-a} = \frac{a-b}{-(a-b)} = \frac{1}{-1} = -1.$$

4. Términos Semejantes

Cuando tenemos un polinomio muy grande, podemos **reducir términos semejantes**. Por ejemplo, si tenemos la expresión

$$3a+4b+5c-2a^2+b^2+3a^2b+2ab^2-8b^2+2a^2-5a+9c-3ab^2-3b+7a^2b,$$

buscamos todos aquellos monomios que tengan la misma parte literal y los agrupamos

$$3a-5a+4b-3b+5c+9c-2a^2+2a^2+b^2-8b^2+3a^2b+7a^2b+2ab^2-3ab^2.$$

Luego, en cada agrupación factorizamos por la parte literal

$$a(3-5)+b(4-3)+c(5+9)+a^2(-2+2)+b^2(1-8)+a^2b(3+7)+ab^2(2-3).$$

Finalmente, sumamos

$$a(-2) + b(1) + c(14) + a^2(0) + b^2(-7) + a^2b(10) + ab^2(-1),$$

obteniendo

$$-2a + b + 14c - 7b^2 + 10a^2b - ab^2.$$

Ojo 6 *Al igual que siempre, debemos respetar el orden de las operaciones, es decir, primero multiplicación y división, seguidos de suma y resta.*

5. Productos Notables

Cuando trabajemos con álgebra, veremos que hay algunas expresiones muy comunes y que pueden ser factorizadas para tener una mayor facilidad al operar. Estas expresiones se denominan **productos notables**. Veamos los más típicos

Nombre	Factorización	Desarrollo
Cuadrado de binomio	$(a \pm b)^2$	$a^2 \pm 2ab + b^2$
Suma por su diferencia	$(a+b)(a-b)$	$a^2 - b^2$
Suma de cubos	$(a+b)(a^2-ab+b^2)$	$a^3 + b^3$
Diferencia de cubos	$(a-b)(a^2+ab+b^2)$	$a^3 - b^3$

Ejemplo 1 *Simplifiquemos al máximo*

$$\frac{b^2-a^2}{a^2-2ab+b^2} = \frac{(b-a)(a+b)}{(a-b)^2} = \frac{-(a-b)(a+b)}{(a-b)(a-b)} = -\frac{a+b}{a-b} = \frac{a+b}{b-a}.$$

Ejemplo 2 *Simplifiquemos al máximo*

$$\frac{a^3+2a^2b+ab^2}{a^4+ab^3} = \frac{a(a^2+2ab+b^2)}{a(a^3+b^3)} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)(a^2-ab+b^2)} = \frac{a+b}{a^2+ab+b^2}.$$

Ojo 7 *Tanto la suma por su diferencia, como la suma y diferencia de cubos se pueden utilizar para racionalizar. Por ejemplo*

$$\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}^2-\sqrt{b}^2} = \frac{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b} = \sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

Ojo 8 *Es un error bastante común creer que* $(a+b)^2 = a^2+b^2$.

Supongamos que tenemos un trinomio de la forma x^2+bx+c donde $b, c \in \mathbb{R}$, es decir, son cualquier número (por ej. x^2+2x+3) y no es posible factorizarlo utilizando los productos notables que hemos vistos.

Existe otra factorización de la forma $(x+p)(x+q)$ donde $p, q \in \mathbb{R}$. Si desarrollamos la multiplicación entre los paréntesis

$$(x+q)(x+p) = x^2+px+qx+pq = x^2+(p+q)x+pq.$$

Por lo tanto, los números buscados, p y q, deben cumplir con que $pq = c$ y $p+q = b$. Si los encontramos, entonces podemos factorizar.

Ejemplo 3 *Factorizemos $x^2 + 3x + 2$. Identifiquemos a nuestros objetivos: $b = 3$ y $c = 2$. Luego, debemos buscar 2 números, p y q tales que $p + q = b = 3$ y $pq = c = 2$. El encontrarlos solamente requiere un poco de ojo y práctica ya que en la PSU, los números no son muy rebuscados. Como 1 y 2 cumplen con estas condiciones, entonces $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2$.*

Ejemplo 4 *Factorizemos $x^2 - 3x - 4$. Reescribiendo la expresión para identificar a nuestros objetivos, obtenemos $x^2 + (-3)x - 4$, por lo tanto: $b = -3$ y $c = -4$. Luego, debemos buscar 2 números, p y q tales que $p+q = b = -3$ y $pq = c = -4$. Como 1 y -4 cumplen con estas condiciones, entonces $x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$.*

Ojo 9 *Es muy importante aprender bien a realizar esta factorización ya que cuando estudiemos la ecuación de segundo grado, nos ahorrará mucho tiempo.*

Ojo 10 *Hay veces en las que los números p y q no existen dentro de los números reales, como en el caso de x^2+x+1. Estas expresiones simplemente no son factorizables usando reales.*

Ojo 11 *Al igual que siempre, la multiplicación es conmutativa y asociativa, es decir, el orden de los factores y cómo se multipliquen, no altera el producto. Por ejemplo*

$$(5a^2b) \cdot (7b^2a^3) = (5 \cdot 7)(a^2a^3)(bb^2) = 35a^5b^3.$$

Ojo 12 *Cuando a uno no se le ocurren los números, mirar las alternativas puede ser una buena ayuda.*

6. Ejercicios

Sin calculadora. Marcar sólo 1 alternativa.

1. El enunciado: El cuadrado del triple de la suma de a y b es mayor en tres unidades que el triple de la suma de los cuadrados de a y b, se expresa por

    a) $3(a+b)^2 = 3(a^2+b^2)+3$

    b) $[3(a+b)]^2 = 3(a+b)^2+3$

    c) $[3(a+b)]^2 = 3(a^2+b^2)+3$

    d) $[3(a+b)]^2 = 3(a^2+b^2)-3$

    e) $3(a+b)^2 = 3(a^2+b^2)-3$

2. Si al triple del sucesor de n se le resta el antecesor del antecesor de n y al resultado se le agrega el cuádruplo de n, resulta

    a) $6n+5$

    b) $6n+3$

    c) $6n+2$

    d) $6n+1$

    e) $5n+5$

3. El número cuyo quíntuplo excede a 21 en lo mismo que 42 excede al doble del número, es

    a) 7

    b) 8

    c) 9

    d) 10

    e) 21

4. Una tabla se divide en dos partes, de tal forma que el trozo mayor corresponde a dos veces la parte menor, más cinco unidades. Si la tabla mide 50 cm, ¿a cuánto es igual la diferencia entre el trozo mayor y el menor, respectivamente?

   a) 15 cm
   b) 20 cm
   c) 25 cm
   d) 30 cm
   e) 35 cm

5. En un curso de 40 alumnos, la mitad escribe, un quinto calcula y el resto lee. ¿Cuántos alumnos leen?

   a) 6
   b) 8
   c) 10
   d) 12
   e) 14

6. Si Emilio gana $\$B$ y gasta las dos quintas partes, ¿cuál de las siguientes expresiones representa el ahorro de Emilio, en pesos?

   a) $B - \frac{2}{5}$
   b) $\frac{2B}{5}$
   c) $B : \frac{2B}{5}$
   d) $\frac{4B}{5}$
   e) $B - \frac{2}{5}B$

7. Julio compra un televisor a crédito en $\$3A$, pagando un cuarto al contado y el resto en nueve cuotas iguales. ¿Cuál es el valor de cada cuota?

   a) $\frac{9A}{4}$
   b) $\frac{A}{4}$

c) $\dfrac{A}{9}$

d) $\dfrac{A}{12}$

e) $\dfrac{A}{36}$

8. $\dfrac{x}{5}+2 = \dfrac{x-1}{2}$ es la trascripción matemática de cuál(es) de los siguientes enunciados:

   I) La semidiferencia entre un número y la unidad, excede en 2 a la quinta parte de ese mism
   II) La quinta parte de un número, aumentada en 2, resulta ser la semidiferencia entre un nú
   III) La quinta parte de un número es 2 unidades menor que la mitad de la diferencia entre un

   a) Sólo II
   b) Sólo I y II
   c) Sólo I y III
   d) Sólo II y III
   e) I, II y III

9. El enunciado: A un número c se le resta su triple y este resultado se multiplica por el cuadrado del doble de c, se escribe

   a) $c - 3c \cdot 2c^2$
   b) $c - 3c \cdot (2c)^2$
   c) $(c - 3c) \cdot (2c)^2$
   d) $(c - 3c) \cdot 2c^2$
   e) $(c - 3) \cdot (2c)^2 2$

10. Un atleta lanza la bala en tres ocasiones obteniendo tres marcas distintas. En el primer lanzamiento alcanzó a metros, en el segundos b metros más que en el primero y en tercero c metros menos que en el segundo. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

   I) La distancia lograda en el primer lanzamiento es mayor que la alcanzada en el tercero.
   II) $(b - c)$ metros representa la diferencia alcanzada entre el segundo y el tercer lanzamiento.
   III) $(a + b - c)$ metros representa la marca del tercer lanzamiento.

a) Sólo I
b) Sólo II
c) Sólo III
d) Sólo I y III
e) I, II y III

11. Al escribir en lenguaje algebraico la diferencia entre el triple de a y el cuadrado de b resulta

    a) $3a - b^2$
    b) $3(a - b^2)$
    c) $(3a - b)^2$
    d) $b^2 - 3a$
    e) $a^3 - b^2$

12. El triple del cuadrado de k, es cinco unidades mayor que P, se expresa como

    a) $3k^2 - 5 = P$
    b) $3k^2 + 5 = P$
    c) $(3k)^2 + 5 = P$
    d) $3(2k) - 5 = P$
    e) $(3k)^2 - 5 = P$

13. Una persona gana \$$a$ anuales y gasta \$$b$ trimestrales, ¿cuánto logra ahorrar en un año?

    a) $a - b$
    b) $a - 2b$
    c) $a - 3b$
    d) $a - 4b$
    e) $a - 5b$

14. Un pastelero vende 3/5 de una torta y reparte en partes iguales el resto entre sus ocho hijos. ¿Qué parte de la torta le tocó a cada hijo?

    a) $\frac{1}{5}$
    b) $\frac{1}{10}$

c) $\frac{1}{20}$

d) $\frac{1}{24}$

e) $\frac{1}{30}$

15. $x^2 + 3x + 2 =$

    a) $(x-2)(x+3)$

    b) $(x-1)(x-2)$

    c) $(x-1)(x+2)$

    d) $(x-1)(x+3)$

    e) $(x+1)(x+2)$

16. $x^4 - 81 =$

    a) $(x^2+9)(x-3)(x+3)$

    b) $(x^2+9)(x^2-3)$

    c) $x^2 - 9$

    d) $x^2 + 9$

    e) $(x^3 - 27)^2$

17. Dada la sucesión de números $1, 2x, 3x^2, 4x^3, \ldots$, ¿cuál es el octavo término?

    a) $8x^8$

    b) $9x^8$

    c) $8x^7$

    d) $9x^9$

    e) $10x^9$

18. $\dfrac{(x^2+3x+2)(x-1)}{(x^2-1)(x+2)} =$

    a) 1

    b) $\dfrac{x-2}{x+2}$

    c) 2

    d) $x - 2$

    e) $\dfrac{x-3}{x+2}$

19. $\dfrac{2x^3-16}{2x^2-8} =$

$a)$ $\dfrac{x+4}{x+2}$

$b)$ $\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}$

$c)$ $\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$

$d)$ $x+2$

$e)$ $\dfrac{x^2-2x+4}{x+2}$

20. $\dfrac{x^2+3x+9}{x^2-9} =$

$a)$ $\dfrac{x+3}{x+9}$

$b)$ $\dfrac{x-3}{x+3}$

$c)$ $\dfrac{x+3}{x-3}$

$d)$ $\dfrac{x-1}{x+3}$

$e)$ $\dfrac{x+3}{x+3}$

21. $\dfrac{2x^2+8x+8}{x+2} =$

$a)$ $2(x+2)$

$b)$ $(2x+2)$

$c)$ $(x+4)$

$d)$ $2(x+3)$

$e)$ $2(x-2)$

22. $\dfrac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} =$

a) $9+4\sqrt{5}$

b) $7+2\sqrt{5}$

c) $-9+2\sqrt{5}$

d) $-9-2\sqrt{5}$

e) $-9+2\sqrt{5}$

23. $\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}} =$

a) $-3+\sqrt{2}$

b) $2+\sqrt{3}$

c) 1

d) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

e) $3+\sqrt{2}$

24. En un curso faltaron a clases 25 de los alumnos. Se puede determinar el número de alumnos del curso si:

(1) Asistieron 24 alumnos.
(2) Faltaron 16 alumnos.

a) (1) por sí sola.

b) (2) por sí sola.

c) Ambas juntas, (1) y (2).

d) Cada una por si sola, (1) ó (2).

e) Se requiere información adicional.

25. Se puede determinar el valor numérico de $\frac{a}{b}$ si se sabe que:

(1) $\frac{1}{a}\left(\frac{3}{2}a - a\right) = \frac{6a}{4b}$

(2) $b = \frac{b}{a}$

a) (1) por sí sola.

b) (2) por sí sola.

c) Ambas juntas, (1) y (2).

d) Cada una por si sola, (1) ó (2).

e) Se requiere información adicional.

1 C	2 A	3 C	4 B	5 D
6 E	7 B	8 E	9 C	10 C
11 A	12 A	13 D	14 C	15 E
16 A	17 C	18 A	19 E	20 B
21 A	22 D	23 E	24 D	25 A